Charles Ehresmann, au carrefour des structures locales et algébriques*

René Guitart

'Toute fonction finie est booléenne mobile'[1]

En la présente occasion je voudrais me faire porte-parole de la génération de 1968 des élèves d'Ehresmann, génération formée en réalité conjointement par Charles et Andrée Ehresmann — qui travaillaient en commun depuis 1962 — et exprimer notre amitié et nos plus profonds remerciements à eux deux. Nous nous souvenons de nombreuses soirées auxquelles Andrée et Charles nous conviaient — souvent avec des mathématiciens de passage au *Séminaire* — où amicalement les discussions roulaient sur de nombreux sujets. Parce qu'il aimait partager chaleureusement ses enthousiasmes, nous savons qu'Ehresmann admirait le Tāj Mahal, Vermeer de Delf, Goethe, Bergson. Mais nous savons d'abord que par-dessus tout il aimait la compréhension mathématique des choses — sa recherche et son partage – qu'il pensait que le plus difficile en mathématique consiste à trouver la bonne définition, que les théories abouties devraient *in fine* tenir en quelques pages, quoique le processus d'invention de structures soit sans fin. Nous savons incidemment que — en profond admirateur d'Archimède — il n'aimait pas que l'on dénigre l'idée d'espace affine — alias le calcul des équilibres de points matériels — au profit de l'espace vectoriel, celui-ci n'existant géométriquement qu'attaché au choix d'un point d'origine dans ledit espace affine, et ne prenant sa valeur naturelle que croisé avec le groupoïde des translations entre les points. Son enseignement était ainsi souvent de telles *simples indications*. Ehresmann était très attentif à ses élèves, méditait longuement ce qu'il allait leur dire, leur indiquer, personnellement en privé ou bien en cours, qui pourrait les inciter à écrire effectivement, à poursuivre par eux-mêmes : "écrivez, écrivez ..." encourageait-il. Nous avons tous le souvenir de ses cours, très préparés en fait, mais où, au bout de quelque minutes il commençait à modifier encore une fois ce qui avait été soigneusement prévu, bref à faire des mathématiques dans l'instant, à penser en direct devant nous, et *en géomètre* bien sûr. Un jour, lors d'une discussion sur l'analyse non-standard et le rapport possible avec le calcul des jets, il m'avertit: "Guitart, vous raisonnez comme un logicien". C'est que pour lui la rigueur devait œuvrer à valoriser les intuitions géométriques, à les rendre vraies, plutôt qu'à les barrer en les rejetant au nom de schèmes de pensées présupposés, voire de vérités établies ; faire des mathématiques c'était chercher toujours l'exact déploiement de *nouvelles* vérités.

* *Colloque International "Charles Ehresmann : 100 ans"*, Amiens 7–9 octobre 2005, in *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, vol. XLVI–3, 2005, p. 172–175.

[1] Pour faire signe gratuitement ici de la fécondité et l'exportabilité (ici de la géométrie à la logique) des idées d'Ehresmann sur les structures locales — lesquelles j'évoque ensuite — et de celles, liées, de son maître Élie Cartan sur les repères mobiles — qui remontent à Darboux, Ribaucour, Serret, etc. — je place en exergue ce théorème mathématique nouveau dont la version formelle est dans : R. Guitart, 'Moving Logic, from Boole to Galois', *Col. Int. "Charles Ehresmann : 100 ans"*, Amiens 7–9 octobre 2005, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, vol. XLVI–3, 2005, p. 196–198.

Á cette époque là, Ehresmann nous instruisait de deux idées : *structures locales* et *structures algébriques* — des problèmes associés : construction de complétions d'atlas, construction de structures libres — et des outils de calculs afférents : recollements et quasi-quotients. Sa pratique inventive était sous condition d'une pulsation entre le local et l'algébrique, et dans la volonté de penser mathématiquement cette pulsation : il œuvrait à convaincre que le cadre des groupoïdes et des catégories en offrait la possibilité. Le but était plus profond que d'empiler les données algébriques sur un cadre local — comme jadis avec ses fibrés — mais bien de penser l'un comme de même nature que l'autre. Ce faisant se dégageait déjà la problématique générale suivante, celle de la construction de *prototype* et de la théorie générale des *esquisses*.

Les *structures locales* — où les variétés, les espaces fibrés et les feuilletages, les revêtements, les espaces étalés, trouvaient à s'unifier — étaient définies depuis 1951. Une *espèce de structure locale* W est une espèce de structure telle que pour toute structure s sur un ensemble E, $s \in W(E)$, il existe une *structure induite* sur certaines de ses parties, ces parties formant les ouverts d'une topologie, les inductions étant transitives, et avec l'*axiome du recollement* : si $E = \cup_{i \in I} E_i$ et si pour tout i de I on a une structure s_i sur E_i telles que $E_i \cap E_j$ soit ouvert dans E_i et E_j et que les structures induites de s_i et s_j sur $E_i \cap E_j$ soient identiques, alors il existe sur E une unique structure s, notée ${}^W\!\!\int_E((s_i)_{i \in I}) = s$, ou brièvement $\int s_i = s$, dont les E_i soient des ouverts et induisant les s_i. En fait, à une structure locale s sur E est associé le *pseudogroupe* $\Gamma_W(E, s)$ de ses automorphismes locaux, qui est un groupoïde ordonné, qui constitue l'essentiel de la structure locale, comme anciennement le groupe d'un espace d'une géométrie de Klein en était le cœur. Par là — après avoir remplacé dans la définition les topologies par des *treillis locaux*, ce qui dispensait de l'usage des points — Ehresmann va, dans les années 60, développer la suite de la théorie du local comme une théorie des groupoïdes ordonnés, puis des catégories ordonnées. On appréciera aujourd'hui le lien et l'écart avec le point de vue de la théorie des topos de Grothendieck, ultérieure aux structures locales et treillis locaux.

Au début des années 60, Ehresmann projetait un livre sur les catégories ordonnées. Il modifia ce projet car, notant le rôle de l'oubli $p_{\mathrm{Ord}} : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ens}$, il visa quelque chose de plus vaste, via l'axiomatisation des propriétés d'un tel foncteur, et, examina, pour des foncteurs quelconques $p : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ l'idée d'une donnée c qui soit une *catégorie p-structurée*. Ce qui incluait comme exemples les catégories doubles, et, via les groupoïdes ordonnés, les structures locales, et aussi les groupes et groupoïdes topologiques ou différentiables indispensables à ses théories sur les prolongements de structures et calculs de jets. Cette idée est alors au centre de sa mise en scène. En fait, rétrospectivement, il y a d'un côté, en omettant c, un lien entre l'étude de p et la théorie des *foncteurs fibrants* — ce qui chez Ehresmann avait deux aspects : *catégories d'opérateurs* et *foncteurs à structures quasi-quotients* — et de l'autre côté, en omettant le foncteur p et en ne gardant que la catégorie $\mathcal{C}$ et la donnée c, il s'agit de ce que l'on appelle aujourd'hui une *catégorie c interne* à $\mathcal{C}$ (dont la première définition est due à Bénabou en 1964). Ce qui se pense naturellement aussi dans l'idée d'*esquisse (mixte)* d'une espèce de structure, introduite en 1966.

Une *esquisse projective* est un couple $\sigma = (S, P)$ où S est un graphe multiplicatif, et P un ensemble de cônes projectifs $p = (p_k : \Pi \to B_k)_{k \in K}$ dans S. Une catégorie $\mathcal{S}$ de structures est dite esquissée par σ si elle est isomorphe à la catégorie Ens^σ des réalisations R de σ dans Ens, qui sont les 'foncteurs' $R : S \to \mathrm{Ens}$ transformant chaque $p = (p_k : \Pi \to B_k)_{k \in K} \in P$ en un cône limite projective dans Ens. Ce qui fait que toute flèche $\omega : \Pi \to B$ de S devient, dans la réalisation R, une 'composition' ω_R dite 'en R'. Ce que l'on écrit ainsi :

$$R : S \to \mathrm{Ens}, \quad \omega : \Pi \to B,$$

$$R(\Pi) \simeq \lim_{\leftarrow\, k \in K} R(B_k), \quad \omega_R = R(\omega).(\simeq^{-1}) : \lim_{\leftarrow\, k \in K} R(B_k) \to R(B).$$

Ainsi par $\omega_R = R(\omega).(\simeq^{-1})$ des éléments x_k des $R(B_k)$, pour les k de K, supposés compatibles entre eux c'est-à-dire bien agencés — soit tels que pour toute flèche $t : k \to k'$ dans K on ait $x_{k'} = R(B_t)(x_k)$ –, peuvent être "composés" pour former $\omega_R((x_k)_{k \in K})$ qui est un élément x de $R(B)$, ce qui est noté, en rappelant en pré-exposant que ω est une loi de σ :

$${}^\sigma\omega_R((x_k)_{k \in K}) = x,$$

ce que l'on rapprochera de

$${}^W\!\!\int_E ((s_i)_{i \in I}) = s$$

vu plus haut, avec ${}^W\!\!\int$, recollement de W, à la place de ${}^\sigma\omega$, opération de σ, et E à la place de R, pour comprendre que les esquisses projectives sont analogues aux espèces de structures locales.

Dans ce cadre on trouve aussi les lois de compositions binaires : si $K = \{1, 2\}$, alors il n'y a pas de condition de compatibilité, et $\omega_R((x_k)_{k \in \{1,2\}}) = x$ est noté simplement $x_1 ._\omega x_2 = x$ ou $x_1 . x_2 = x$. Et plus généralement on trouve les structures algébriques 'partout définies' unisortes de Lawvere, et les multisortes, de Bénabou. L*'esquisse projective*, suite aux *topologies projectives* de Bénabou et aux *catégories marquées* de Chevalley, est le milieu naturel ou coexistent l'opération algébrique $x_1 . x_2 = x$ et le recollement $\int s_i = s$. Ainsi sont de même nature le fait algébrique que 2 fois 3 fasse 6 et le fait géométrique qu'en collant deux segments $[0, 1]$ et $[0', 1']$ par leurs extrémités — en posant $0 \equiv 0'$ et $1 \equiv 1'$ — on obtienne un cercle S^1.

On obtient des esquisses projectives pour des lois partielles, et, par exemple il existe une esquisse σ_{Cat} de la structure de catégorie, de sorte qu'une catégorie C soit assimilable à une réalisation $C : \sigma_{\mathrm{Cat}} \to \mathrm{Ens}$, et qu'ainsi $\mathrm{Cat} \simeq \mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{Cat}}}$. Alors les catégories c internes à $\mathcal{C}$ sont les réalisations de σ_{Cat} dans $\mathcal{C}$, et forment la catégorie $\mathrm{Cat}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\sigma_{\mathrm{Cat}}}$. Il y a aussi bien sûr une esquisse σ_{Grd} pour les groupoïdes, une esquisse σ_{Ord} pour les ordres. Et via ces esquisses, les structures locales peuvent se spécifier comme des groupoïdes internes aux ordres, voire comme réalisations dans Ens de l'esquisse $\sigma_{\mathrm{Grd}} \otimes \sigma_{\mathrm{Ord}}$. Mais le rapport du local à l'algébrique est aussi autre : les esquisses projectives sont comme des espèces de structures locales généralisées. Ce qu'accentue le mouvement vers la théorie des prototypes.

Du côté des structures algébriques il y a l'existence de structures libres, par exemple la construction des groupes libres et des monoïdes libres, comme $\mathbb{N} = \{1\}^*$, avec l'idée de mot ; et du côté des structures locales, il y a la complétion d'atlas, par exemple la complétion d'ensembles ordonnés, comme $\mathbb{R} = \hat{\mathbb{Q}}$, avec l'idée de coupure. Les deux s'intègrent aux *théorèmes d'existence de p-structures libres*. Puis au niveau des esquisses, cela se fond dans un même énoncé : si $\mu : \sigma \to \tau$ est un morphisme d'esquisses projectives, alors le foncteur de composition avec μ, soit $\mathrm{Ens}^\mu : \mathrm{Ens}^\tau \to \mathrm{Ens}^\sigma$, admet un adjoint à gauche L_μ.

En 1968, dans l'amphithéâtre Hermite à l'IHP, Ehresmann nous enseignait comment construire universellement, comme complétion, le prototype $\Theta(\sigma)$ d'une esquisse σ, l'esquisse universellement associée à σ et qui soit un *prototype* c'est-à-dire telle que le graphe multiplicatif sous-jacent soit une catégorie et que les cônes distingués y soient des limites projectives. En fait, il y a, sous des conditions limitant les tailles, une esquisse projective $\sigma_{\mathrm{Esquisse}}$ dont les réalisations soient les esquisses projectives, et avec $\mathrm{Esquisse} \simeq \mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{Esquisse}}}$, et l'on peut appliquer le théorème d'existence des L_μ ci-avant à la théorie des esquisses. Notamment, si l'on désire des esquisses ayant telle propriété, on peut le faire universellement par ce moyen, dès que ladite propriété est elle-même projectivement esquissable. La construction des prototypes peut se faire par ce moyen, puisque le fait d'être un prototype s'esquisse, par une esquisse projective $\sigma_{\mathrm{Prototype}}$ avec un morphisme $\mu : \sigma_{\mathrm{Esquisse}} \to \sigma_{\mathrm{Prototype}}$.

Pour ne pas laisser de place au malentendu je souligne bien que parmi les outils que j'utilise pour m'expliquer ici, les constructions $\sigma \otimes \tau$, L_μ, $\sigma_{\mathrm{Esquisse}}$ et $\sigma_{\mathrm{Prototype}}$, sont des résultats de Conduché, Foltz, Burroni, Lair, au tournant des années 1970, et qu'en 1968 Ehresmann ne parlait donc pas en ces termes. Mais ensuite ces manières de dire lui sont devenues usuelles, notamment dans les travaux avec Andrée sur les catégories multiples.

En tous cas, en 1968, l'idée de complétion, qui venait du côté des structures locales, trouvait naturellement et nécessairement à se répéter pour les esquisses projectives ou mixtes, au titre de la question des prototypes, ce qui confirme que les esquisses soient à penser comme des espèces de structures locales généralisées.

Et puis, si la théorie des esquisses projectives est bien comme je le suggère un élargissement minimal de la théorie des espèces de structures locales qui permette de penser comme *de même nature* le local et l'algébrique, alors en retour se dégage le problème d'importer en théorie des esquisses ce qui semblait spécifique de la théorie des structures locales. Ainsi — pour terminer par une *simple indication* à la manière d'Ehresmann — on demandera tout spécialement de construire pour une réalisation pointée $(R; B, x)$ d'une esquisse projective σ, soit une réalisation R de σ, un objet B de S, et un élément x de $R(B)$, une structure $\Gamma_\sigma(R; B, x)$ qui jouerait en théorie des esquisses un rôle analogue à celui du pseudogroupe $\Gamma_W(E, s)$ des isomorphismes locaux pour une structure locale (E, s). De manière à étendre aux structures algébriques ce qu'Ehresmann a fait pour les structures locales et Klein pour les géométries élémentaires. Comme aurait dit Ehresmann, il faudra y revenir une autre fois.