ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Structures algébriques et extensions de Kan d'applications covariantes*. Note (*) de M. **René Guitart**, présentée par M. René Garnier

On pose le problème de l'extension de Kan à gauche d'une application covariante le long d'une autre et on donne un théorème d'existence qui étend le champ d'application du théorème de Kan d'extension de foncteur. Celui-ci pourra en particulier s'appliquer à l'étude des catégories algébriques relativement à un foncteur donné que nous introduisons ensuite. Les notations sont celles de (1).

1. Produit croisé et diagramme. — Soit $\mathcal{U}$ et $\hat{\mathcal{U}}$ deux univers tels que $\mathcal{U} \in \hat{\mathcal{U}}$ et que $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{U}}$, $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ les catégories correspondantes de foncteurs, et $\overline{\mathcal{F}}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{F}}$ dont les objets sont les $\mathcal{U}$-catégories. Pour $A \in \overline{\mathcal{F}}_0$ soit $\mathcal{D}(A)$ la catégorie ayant pour objets les foncteurs p de X dans A avec $X \in \mathcal{F}_0$, un morphisme de p vers p' étant déterminé par un couple (f, l), où f est un foncteur de X vers la source de p' et l une transformation naturelle de p vers $p'.f$. On note d_A le foncteur de $\mathcal{D}(A)$ vers $\mathcal{F}$ qui à (f, l) associe f. Si pour un foncteur F de A vers B on note $\mathcal{D}(F)$ le foncteur de $\mathcal{D}(A)$ vers $\mathcal{D}(B)$ défini par la composition avec F, on sait que $\mathcal{D}$ est l'endofoncteur d'un triple $(\mathcal{D}, \varepsilon, \varkappa)$ dans $\overline{\mathcal{F}}$ [*voir* (2)]. Notons $\mathcal{D}'(F)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(A)$ ayant pour objets les foncteurs p tel que $F.p$ soit constant, et q_F l'inclusion de $\mathcal{D}'(F)$ dans $\mathcal{D}(A)$. On désigne $d_A.q_F$ par d_F. En associant d_F à chaque F de $\overline{\mathcal{F}}$, on détermine le *foncteur diagramme d* de la catégorie $\mathbf{n}(\overline{\mathcal{F}}, \mathbf{2})$ des quatuors de $\overline{\mathcal{F}}$ vers la catégorie $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ des morphismes dans $\overline{\mathcal{F}}$ au-dessus de l'objet $\mathcal{F}$ de $\overline{\mathcal{F}}$. Pour tout foncteur p d'une catégorie X vers $\mathcal{F}$, soit $\mathcal{K}(p)$ la catégorie produit croisé (1) de p, et k_p le foncteur canonique de $\mathcal{K}(p)$ vers X. Si X est fixée, l'application qui à tout p associe k_p détermine un foncteur de $\mathbf{n}(\mathcal{F}, X)$ vers $(\mathcal{F}, X)$ coadjoint au *foncteur comma* assignant à un foncteur M de but X le foncteur $M^{\S}$ de X vers $\mathcal{F}$ dont la valeur en x est la catégorie comma (M, x) [*voir* (3)]. Notons aussi que pour $A \in \mathcal{F}_0$ la catégorie $\mathcal{D}(A)$ est isomorphe à $\mathcal{K}(\mathbf{n}(A, -))$. L'application associant k_p à tout foncteur p vers $\mathcal{F}$ définit un foncteur k de $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ vers $\mathbf{n}(\overline{\mathcal{F}}, \mathbf{2})$ appelé *foncteur produit croisé*. On peut montrer que *le foncteur produit croisé k est adjoint au foncteur diagramme d*. Soit P_1 et P_2 les foncteurs de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{M}$ associant respectivement à une catégorie C l'ensemble C_0 de ses objets et l'ensemble $\underline{C}$ de ses morphismes, soit P'_1 et P'_2 leurs adjoints, et Z_1 le foncteur $P'_1.P_1$. La composition avec Z_1 à gauche définit un endofoncteur $\overline{Z}_1$ de $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$.

Le foncteur $k.\mathrm{Z}_1$ est noté h. La catégorie $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ et h et k s'étendent en des foncteurs H et $\mathrm{K} = \varkappa_1$ de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ vers $\mathcal{F}$. On note S (resp. O) le foncteur de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ vers $\mathcal{F}$ associant au foncteur p de X vers $\mathcal{F}$ la catégorie $\sum_{e \in \mathrm{X}_0} p(e)$ (resp. X). Enfin rappelons [*voir* [4]] que, si H est une catégorie cartésienne fermée et complète, alors $\mathcal{O}(\mathrm{H})$ est cartésienne fermée. En particulier $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ est cartésienne fermée et nous avons un foncteur hom-interne $\mathcal{H}$ de $\mathcal{O}(\mathcal{F}) \times \mathcal{O}(\mathcal{F})^*$ ver $\mathcal{O}(\mathcal{F})$.

2. Extension de Kan. — Soit p, $\bar{p}$ et $\hat{p}$ trois objets de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ et η un morphisme (F', f') dans $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ de p vers $\bar{p}$. Soit U un foncteur de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ vers $\mathcal{F}$ tel que $\mathrm{P}_1.\mathrm{U}.\mathcal{H}$ soit égal à $\mathrm{HOM}_{\mathcal{O}(\mathcal{F})}$. Alors $\mathrm{U}(\mathcal{H}(\hat{p}, \eta))$ est un foncteur de source $\mathrm{U}(\mathcal{H}(\hat{p}, \bar{p}))$ et de but $\mathrm{U}(\mathcal{H}(\hat{p}, p))$, que, pour alléger, nous noterons $\mathrm{U}_{\hat{p}}\,\eta$. Si un élément λ de $\mathrm{HOM}_{\mathcal{O}(\mathcal{F})}(\hat{p}, p)$ admet une $\mathrm{U}_{\hat{p}}\,\eta$-structure libre ν, nous dirons de ν que c'est une U-*extension de Kan à gauche de* λ *le long de* η. On pourra dans cette définition prendre en particulier pour U l'un des foncteurs K, H, S ou O introduits ci-dessus. Ainsi la catégorie $\mathrm{H}(\mathcal{H}(\hat{p}, \bar{p}))$ a pour objets les paires $(\overline{\mathrm{T}}, \bar{f})$, où $\overline{\mathrm{T}}$ est un foncteur de la source de $\bar{p}$ vers la source de $\hat{p}$ et $\bar{f}$ une transformation naturelle de $\bar{p}$ vers $\hat{p}.\overline{\mathrm{T}}$; un morphisme de $(\overline{\mathrm{T}}', \bar{f}')$ vers $(\overline{\mathrm{T}}, \bar{f})$ est déterminé par la donnée d'une transformation naturelle l de $\overline{\mathrm{T}}'$ vers $\overline{\mathrm{T}}$ telle que $\bar{f} = (\hat{p}.\,l) \,\square\square\, \bar{f}'$; le foncteur $\mathrm{H}_{\hat{p}}\,\eta$ associe alors $(\overline{\mathrm{T}}.\mathrm{F}', (\bar{f}.\mathrm{F}') \,\square\square\, f')$ à $(\overline{\mathrm{T}}, \bar{f})$.

Théorème. — *Si les extensions de Kan le long de* F' *existent et si le foncteur* $(\mathrm{P}_2.\hat{p})$ *est à quasi-quotients, alors le foncteur* $\mathrm{H}_{\hat{p}}(\mathrm{F}', f')$ *admet un adjoint.*

Pour la notion de quasi-quotient on se reportera à [5]. On notera que, si $\hat{p}$ est un foncteur constant sur **1**, on retrouve la définition de l'extension de Kan classique.

3. Ébauche. — Si G est un graphe multiplicatif [1], un endomorphisme local de G est un triplet $(\mathrm{V}, f, \mathrm{U})$, où f est une application de $\mathrm{U} \subset \mathrm{G}$ vers $\mathrm{V} \subset \mathrm{G}$ telle que $f(x.y) = f(x).f(y)$ si x, y et $x.y$ appartiennent à U et que $f(\alpha(x)) = \alpha(f(x))$ [resp. $f(\beta(x)) = \beta(f(x))$] si x et $\alpha(x)$ [resp. $\beta(x)$] appartiennent à U. Les endomorphismes locaux de G forment une catégorie notée el (G).

Soit $\mathcal{N}'$ la catégorie des homomorphismes entre graphes multiplicatifs G tels que $\underline{\mathrm{G}} \in \mathcal{U}$, et $\mathcal{E}'$ la catégorie ayant pour objets les néofoncteurs de la forme $(\mathrm{el}(\mathrm{G}), \underline{\mathrm{E}}, \mathrm{X})$ avec X et G éléments de $\mathcal{N}'_0$, un morphisme de E vers E' de source X' et de but el (G') étant un triplet $(\mathrm{E}', (\mathrm{S}, \mathrm{T}), \mathrm{E})$, où S est un néofoncteur de X vers X' et T un néofoncteur de G vers G', vérifiant la condition : si $\mathrm{E}(x)(g)$ est défini pour $x \in \mathrm{X}$ et $g \in \mathrm{G}$, alors $\mathrm{E}'(\mathrm{S}(\mathrm{X}))(\mathrm{T}(g))$ est défini et égal à $\mathrm{T}(\mathrm{E}(x)(g))$. La composition dans $\mathcal{E}'$ est induite par celle de $\mathcal{N}'$. On note $\mathcal{E}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}'$ dont les objets sont les (el (G), $\underline{E}$, X), où X et G sont des catégories. On désigne par $\mathcal{E}m$ la catégorie des espèces de morphismes au-dessus de $\mathfrak{U}$. Les objets de $\mathcal{E}'$ sont appelés *ébauches* [*voir* ([6])].

Proposition. — *Les inclusions canoniques de* $\mathcal{E}m$ *dans* $\mathcal{E}$ *et de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}'$ *admettent des adjoints, notés* M *et* N, *et les catégories* $\mathcal{E}'$ *et* $\mathcal{E}$ *sont à* $\mathcal{F}_0$*-limites inductives ou projectives.*

Soit E′, E, F et Q des ébauches, J un morphisme de E′ vers E, L un morphisme de E′ vers F, R un ensemble de morphismes de F vers Q. Soit alors D une somme fibré de J et L dans $\mathcal{E}'$, L′ et J′ les morphismes canoniques de F et E dans D. Notons i l'inclusion canonique de $\mathcal{E}m$ dans $\mathcal{O}(\mathcal{F})$, et considérons un foncteur U de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ vers $\mathcal{F}$.

Définition :

(*a*) *Une* R*-algèbre de* (J, L) *d'espace* A *et de loi* θ *est un couple* (A, θ), *où* $A \in R$ *et où* θ *est un morphisme de* E *vers* Q *tel que* $A . L = \theta . J$.

(*b*) *La catégorie* U ($\mathcal{H}$ (i M (Q), i M (D))) *est appelée catégorie des* (U, R)*-algèbres de* (J, L), *le foncteur* $U_{i M (Q)}\, i\, M (L')$ *étant le foncteur d'oubli des lois et le foncteur* $U_{i M (Q)}\, i\, M (J')$ *le foncteur d'oubli des espaces.*

On voit alors comment l'existence de structures algébriques libres sur un espace (ou sur une loi) repose sur des théorèmes du type de celui donné au paragraphe 2. Notons aussi que notre définition met en évidence la symétrie des rôles joués par la loi et l'espace d'une algèbre, ainsi que la pluralité des notions « naturelles » de morphismes entre les algèbres (dépendant du choix de U).

4. Types de structures et ébauches. — Les définitions usuelles de la notion de type de structure sont, chacune, la description d'une classe spéciale d'ébauches.

a. Si $H^{\cdot \perp}$ est une catégorie double, e et e' deux unités doubles de H, f un élément de $(e . H . e)^{\perp}_{0}$ (resp. $(e' . H . e')^{\perp}_{0}$), on note $^{\cdot}f$ (resp. $f^{\cdot}$) l'endomorphisme local de $H^{\perp}$ qui à $z \in e' . H . e$ associe $z . f$ (resp. $f . z$); la catégorie $H^{\perp}$ munie de tous les $^{\cdot}f$ et $f^{\cdot}$ devient une ébauche E (.), qui, pour toute unité double u, induit une ébauche $E(.)^u$ sur $u . H . u$. En particulier pour une catégorie C regardée comme unité double de la catégorie des transformations naturelles nous avons l'ébauche $E(\square\square)^C$ de End (C) vers el ($\mathfrak{N}$ (C, C)$\square\square$).

b. Si H est une catégorie, d un foncteur de $H \times H^*$ vers $\mathcal{F}$, et si $e \in H_0$, l'opération de H^* sur $\sum_{u \in H_0} d(e, u)$ détermine une ébauche A (d, e). Si H est la catégorie $\mathcal{S}$ des réalisations entre prototypes projectifs $\sigma = (C, \mu)$ et d la domination évidente de $\mathcal{S}$ par $\mathcal{F}$, l'ébauche A (d, σ) ainsi associée à $\sigma \in \mathcal{S}_0$ est notée $\mathfrak{A}(\sigma)$; $\mathfrak{A}$ définit un plongement pleinement fidèle de $\mathcal{S}$

dans $\hat{\mathcal{E}}$. On peut aussi définir un foncteur de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{E}$ en associant à tout (C, μ) l'ébauche consistant en C munie des endomorphismes locaux « provenant des cônes donnés par μ », tels le produit fibré le long d'un morphisme donné.

c. Soit $U_{\mathcal{F}}^{\cdot}$ le graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse de catégorie donnée dans (7); le quotient $U_{Mon}^{\cdot}$ de $U_{\mathcal{F}}^{\cdot}$ par l'identification de a et b à un seul élément θ est le graphe multiplicatif sous-jacent à une esquisse des monoïdes. On note $U_{Mon}^{\cdot\prime}$ le sous-graphe multiplicatif de $U_{Mon}^{\cdot}$ obtenu en supprimant θ, v_1, v_2, w_1 et w_2. On obtient une ébauche M_s en munissant $U_{Mon}^{\cdot}$ des opérateurs s_1 et s_2, définis aux points u_0, u, $u \star u$, i, k et θ, leurs valeurs y étant, dans l'ordre, u, $u \star u$, $(u \star u) \star (u \star u)$, $v\,(u, i.a)$, k_1 et v_1 pour s_1, et u, $u \star u$, $(u \star u) \star (u \star u)$, $v\,(i.b, u)$, k_2 et v_2 pour s_2. On désigne par J_{Mon} l'inclusion canonique de M'_s dans M_s, où M'_s est l'ébauche induite par M_s sur $U_{Mon}^{\cdot\prime}$.

d. Pour une catégorie C, soit E (C) l'ébauche consistant en C muni de tout ses endomorphismes; pour $e \in C_0$, le foncteur de $\mathcal{H}$ (C, C) vers C dont la valeur en F est F (e) détermine un morphisme $\bar{e}$ de $E(\square\square)^c$ vers E (C); soit R_C l'ensemble des $\bar{e}$, où $e \in C_0$.

PROPOSITION. — *Un triple* **T** *sur une catégorie* C *est déterminé par la donnée d'un morphisme* T *de* M'_s *vers* $E(\square\square)^c$, *et une algèbre (au sens d'Eilenberg-Moore) du triple* **T** *s'identifie à une* R_C-*algèbre de* (J_{Mon}, T) *au sens de la définition du paragraphe* 3.

(*) Séance du 21 mai 1973.

(1) C. EHRESMANN, *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
(2) D. PROCHASSON, *Catégories complètes à gauche et triples* (*Esq. math.*, 12, Paris, 1971).
(3) J. GRAY, *The categorical comprehension scheme* (*Lecture Notes*, 99, Springer, 1969).
(4) F. FOLTZ, *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 221.
(5) C. EHRESMANN, *Math. Ann.*, 17, 1967, p. 293-363.
(6) R. GUITART, *Sur l'ébauche des structures* (3d *Congress of Bulgarian mathematicians*, Summaries part II, septembre 1972, p. 354).
(7) C. EHRESMANN, *Bull. Inst. polit. din Iasi*, serie noua, XIV (XVIII), fasc. 1-2, 1968.

Département de Mathématiques,
Université de Paris VII,
Tour 45-55,
2, *place Jussieu,*
75005 *Paris.*