SUR LE FONCTEUR DIAGRAMME

par René GUITART

1. Diagrammes et machines.

Soit $\mathfrak{U}$ et $\hat{\mathfrak{U}}$ deux univers tels que $\mathfrak{U}$ appartienne à $\hat{\mathfrak{U}}$ et soit contenu dans $\hat{\mathfrak{U}}$; on note Cat et $\widehat{Cat}$ les catégories correspondantes de foncteurs, et $\overline{Cat}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{Cat}$ ayant pour objets les catégories C telles que $Hom_C(c, c') \in \mathfrak{U}$, pour tout couple (c, c') d'objets de C. Pour tout objet A de $\overline{Cat}$, soit $\mathfrak{D}(A)$ la catégorie ayant pour objets les foncteurs p de X vers A, où $X \in |Cat|$, un morphisme de p vers p' étant déterminé par un couple (f, l), où f est un foncteur de X vers la source X' de p' et l une transformation naturelle de p vers $p'.f$.

Pour tout objet A de $\overline{Cat}$, notons d_A le foncteur canonique de $\mathfrak{D}(A)$ vers Cat qui associe f à (f, l). L'application associant d_A à A s'étend en un foncteur, noté d, de $\overline{Cat}$ vers la catégorie $\overline{Cat}/_{Cat}$ des objets au-dessus de $Cat \in |\overline{Cat}|$, que l'on appelle *foncteur diagramme*.

Pour tout foncteur p de $X \in |\overline{Cat}|$ vers Cat, soit $K(p)$ la catégorie produit croisé [1] de p. L'application associant $K(p)$ à chaque p s'étend en un foncteur K de $\overline{Cat}/_{Cat}$ vers $\overline{Cat}$.

PROPOSITION 1. *Le foncteur K est adjoint à gauche au foncteur d.*

PROPOSITION 2. *$\mathfrak{D}$ est l'endofoncteur d'un triple «à isomorphisme près» $(\mathfrak{D}, \varepsilon, \kappa)$ dans $\overline{Cat}$.* (Voir [1] et [2].)

En fait, $(\mathfrak{D}, \varepsilon, \kappa)$ est une doctrine dans $\overline{Cat}$, de sorte que la catégorie de Kleisli de ce triple est sous-jacente à une bicatégorie, notée **D**.

PROPOSITION 3. *La bicatégorie* **D** *est isomorphe à la bicatégorie des machines avec sorties $Mac\,S$.*

(Une machine d'entrée X et sortie Y est la donnée d'une fibration de source A et but X et d'un foncteur S de A vers Y [4].)

C'est au cours d'une discussion avec P. Leroux que j'ai réalisé ce phénomène. Là encore la proposition 1 donne facilement le résultat.

Pour d'autres développements et prolongements de ces questions, on pourra se reporter à [3], où l'on explique comment on peut faire dans ce cadre une théorie des structures algébriques. Un point essentiel à ce sujet est de savoir faire l'extension de Kan «avec paramètre».

2. Extension de Kan généralisée.

Rappelons [6] que, si H est une catégorie cartésienne fermée et complète, alors $\mathfrak{D}(H)$ est cartésienne fermée. En particulier $\mathfrak{D}(Cat)$ est cartésienne fermée, et nous avons un foncteur *hom*-interne

$$\mathfrak{H} \text{ de } \mathfrak{D}(Cat)^* \times \mathfrak{D}(Cat) \text{ vers } \mathfrak{D}(Cat).$$

Soit p, $\overline{p}$ et $\hat{p}$ trois objets de $\mathfrak{D}(Cat)$ et η un morphisme (F', f') dans $\mathfrak{D}(Cat)$ de p vers $\overline{p}$. Soit U un foncteur de $\mathfrak{D}(Cat)$ vers Cat tel que $|\;|.U.\mathfrak{H}$ soit égal à $Hom_{\mathfrak{D}(Cat)}$. Alors $U(\mathfrak{H}(\eta, \hat{p}))$ est un foncteur

de source $U(\mathfrak{H}(\overline{p}, \hat{p}))$ et de but $U(\mathfrak{H}(p, \hat{p}))$.

Si un élément λ de $Hom_{\mathfrak{D}(Cat)}(p, \hat{p})$ admet une $U(\mathfrak{H}(\eta, \hat{p}))$-structure libre ν, nous disons que ν est une *U-extension de Kan à gauche de λ le long de η.*

Soit H le foncteur de $\mathfrak{D}(Cat)$ vers Cat associant à un foncteur p de X vers Cat la catégorie $K(\iota . |\;| . p)$, où ι est l'inclusion de Ens vers Cat. Soit p_2 le foncteur de Cat vers Ens associant à une catégorie l'ensemble de ses morphismes.

THEOREME. *Si les extensions de Kan le long de F' existent et si le foncteur $p_2 . \hat{p}$ est à quasi-quotients* [5], *alors le foncteur $H(\mathfrak{H}(\eta, \hat{p}))$ admet un adjoint à gauche.*

1. C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris 1965, et cours polycopié sur les espèces de structures, Paris 1969.
2. D. PROCHASSON, Catégories complètes à gauche et Triples, *Esquisses Mathématiques* 12, Paris 1971. (On m'a signalé que A. Kock a fait des travaux proches de ces questions.)
3. R. GUITART, Structures algébriques et extension de Kan d'applications covariantes, *C. R. A. S.* 276, Paris (1973).
4. P. LEROUX, non publié. (La notion de machine utilisée ici est un cas particulier de celle de système guidable, introduite par A. Bastiani, dans des publications du Laboratoire d'Automatique théo. de Caen en 1963 et 1964.)
5. C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), p. 293.
6. F. FOLTZ, *C. R. A. S.* Paris, 271 (1970), p. 221.