C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277 (12 novembre 1973) Série A — 935

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Les monades involutives en théorie élémentaire des ensembles.* Note (*) de M. René **Guitart**, présentée par M. Szolem Mandelbrojt.

On définit les monades involutives complémentées sur une catégorie. Une telle donnée existe par exemple dans un topos booléien. Cette notion naturelle permet de mettre l'accent sur le prédicat de non-inclusion en théorie élémentaire des ensembles (proposition 4). On verra ultérieurement comment de cette notion découle une théorie des catégories commutatives.
Cette Note fait suite à ([1]) dont on reprend les notations.

1. MONADE INVOLUTIVE. — Une *catégorie à involution* est un couple (K, I), où K est une catégorie et I un foncteur de K vers sa duale K* tel que $I^* \circ I$ soit égal à Id_K et que, pour tout objet k, I (k) soit égal à k. Un morphisme de (K, I) vers une catégorie à involution (K′, I′) est déterminé par un foncteur M de K vers K′ tel que $I' \circ M$ et $M^* \circ I$ soient égaux. On désigne par $\mathscr{F}\mathscr{I}$ la catégorie des morphismes entre catégories à involution (K, I) telles que $K \in \mathscr{U}$, où $\mathscr{U}$ est un univers fixé, et par $\mathscr{F}$ la catégorie des foncteurs relative à $\mathscr{U}$. Si $P_{\mathscr{I}}$ est le foncteur de $\mathscr{F}\mathscr{I}$ vers $\mathscr{F}$ oubliant les involutions, on vérifie que $P_{\mathscr{I}}$ *admet un adjoint et un coadjoint.*

DÉFINITION. — *a*. On appelle *monade involutive* sur une catégorie C la donnée d'un couple ($\overline{T}$, I), où $\overline{T}$ est une monade (i. e. une construction standard) sur C, et où I est une involution sur la catégorie de Kleisli Kl ($\overline{T}$) de $\overline{T}$.

b. On appelle *construction standard contravariante* [c. s. c. s. dans ([1])] sur une catégorie C la donnée d'un triplet (F, i, d), où F est un foncteur de C vers C*, où $i = (i_c)_{c \in C_0}$ et $d = (d_c)_{c \in C_0}$ sont deux familles de morphismes de C telles que, pour tout objet c, i_c soit de source c et de but F (c) et d_c de source F (c) et de but F^2 (c), ces données devant de plus satisfaire aux axiomes :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CSC}\,1: && (\forall f \in C) && (F^2(f).d_{\alpha(f)}.i_{\alpha(f)} = d_{\beta(f)}.i_{\beta(f)}.f),\\
&\mathrm{CSC}\,2: && (\forall f \in C) && (F^2(f).d_{\alpha(f)} = d_{\beta(f)}.F(i_{\beta(f)}).F^2(f).d_{\alpha(f)}),\\
&\mathrm{CSC}\,3: && (\forall c \in C_0) && (F(i_c).F(d_c).d_{F(c)}.i_{F(c)} = F(c)),\\
&\mathrm{CSC}\,4: && (\forall c \in C_0) && (F(d_c).d_{F(c)} = d_c.F(i_c).F(d_c).d_{F(c)}).
\end{aligned}$$

On peut montrer que les quatre axiomes ci-dessus sont indépendants.

Dans ([1]) nous avons indiqué comment une monade involutive était associée à une construction standard contravariante; en fait on peut procéder à l'association inverse, et on a donc :

THÉORÈME 1. — *Pour toute catégorie C l'ensemble des monades involutives sur C est une bijection avec l'ensemble des constructions standards contravariantes sur C.*

Pour les premiers exemples (monades involutives sur un groupe, sur un ordre, sur un topos de Lawvere-Tierney) on se reportera à ([1]). Notamment, si $\mathscr{M}$ est la catégorie pleine d'applications entre ensembles de $\mathscr{U}$, on désigne par $B_{\mathscr{U}}$ la monade involutive ($\overline{\mathfrak{P}}$, $\tilde{d}$) sur $\mathscr{M}$, où $\overline{\mathfrak{P}}$ est le triple des parties d'unité le singleton et de multiplication la réunion, et où $\tilde{d}$ est l'involution sur la catégorie des relations associant à toute relation la relation opposée.

On note $B'_{\mathscr{U}}$ la monade involutive sur $\mathscr{M}$ définie par la construction standard contravariante (F, i', d'), où $F(f)$ est l'extension réciproque aux parties de l'application $f \in \mathscr{M}$, et où, pour tout $X \in \mathscr{U}$, i'_X est l'application de X dans $\mathfrak{P}(X)$ prenant en $x \in X$ la valeur $X \setminus \{x\}$, et d'_X l'application de $\mathfrak{P}(X)$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ prenant en $A \subset X$ la valeur $\{A' \subset X / \complement_X A' \subset A\}$. [On vérifie que (F, i', d') satisfait aux axiomes CSC 1 à CSC 4.] On note $B^f_{\mathscr{U}}$ (resp. $B'^f_{\mathscr{U}}$) la restriction de $B_{\mathscr{U}}$ (resp. de $B'_{\mathscr{U}}$) à la sous-catégorie $\mathscr{M}^f$ de $\mathscr{M}$ formée des applications entre ensembles finis.

Si $A = (, A+, .)$ est un *semi-anneau commutatif unitaire fini*, on détermine une monade involutive $M(A)$ sur $\mathscr{M}^f$ de la forme $(\overline{T}_A, I_A)$, où $\overline{T}_A$ est le triple dans $\mathscr{M}^f$ induit par l'adjonction usuelle entre $\mathscr{M}^f$ et la catégorie des A-modules finis, et où I_A correspond à la transposition des matrices. Ceci vaut donc en particulier si A est un corps fini ou un treillis distributif fini. $M((Z/2Z), +, .)$ est une monade involutive dont la multiplication représente l'opération de « différence symétrique », et on retrouve $B^f_{\mathscr{U}}$ comme $M((\{0, 1\}, \sup, \inf.))$.

Avec les notations de [1], soit U une monade involutive déterminée (*cf.* th. 1) par une construction standard contravariante (F, i, d). Notons $\bar{d}$ l'application de $R^{\cdot}_U$ dans $HR^{\cdot}_U$ qui à un élément r de $c'.R_U.c$ associe $d_{c'}.r$.

Proposition 2. — *L'application $\bar{d}$ détermine un foncteur de $R^{\cdot}_U$ dans $HR^{\cdot}_U$ qui admet un adjoint à droite, et si l'on note Q_U le triple induit sur $R^{\cdot}_U$, la catégorie de Kleisli de Q_U est isomorphe à HR_U. De plus, dans le cas où U est $B_{\mathscr{U}}$, la catégorie des algèbres de $Q_{B_{\mathscr{U}}}$ est isomorphe à $\mathscr{M}^*$.*

2. Monade involutive complémentée. — On appelle *monade involutive complémentée* (abrégé en m. i. c.) un couple (U, n), où U est une monade involutive sur une catégorie C déterminée par une construction standard contravariante (F, i, d) et où n est une famille $(n_c)_{c \in C_0}$ de morphismes de C telle que, pour tout objet c, n_c soit de source et but $F(c)$, que $n_c^2 = F(c)$, et que, en posant $i'_c = n_c.i_c$ et $d'_c = F(n_c).n_{F(c)}.d_c.n_c$, le triplet (F, i', d') soit une construction standard contravariante déterminant donc une monade involutive U' sur C. Alors (U', n) est aussi une monade involutive complémentée et $(U')'$ est égal à U.

Théorème 3. — *Soit U une monade involutive associée à une construction standard contravariante (F, i, d) sur une catégorie C, et soit, pour tout $c \in C_0$, n_c un morphisme de $F(c)$ vers $F(c)$. Pour que (U, n) soit une monade involutive complémentée, il suffit que :*

$$\text{MIC 1 :} \quad (\forall f \in C) \quad (n_{\alpha(f)}.F(f) = F(f).n_{\beta(f)});$$
$$\text{MIC 2 :} \quad (\forall c \in C_0) \quad (n_c^2 = F(c));$$
$$\text{MIC 3 :} \quad (\forall c \in C_0) \quad (F(n_c).d_c.i_c = n_{F(c)}.d_c.i_c).$$

De plus, si $\overline{T}$ (resp. $\overline{T}'$) est la monade sous-jacente à U (resp. U') et si on note $\circ$ (resp. $\bigstar$) la composition dans $Kl(\overline{T})$ [resp. $Kl(\overline{T}')$] on a, pour R de source c et but c' et S de source c' et but c'' :

$$S \bigstar R = n_{c''}.((n_{c''}.S) \circ (n_{c'}.R)).$$

Si (U, n) est une m. i. c., le composé $d_c.n_c$ est noté O_c.

PROPOSITION 4. — *Une monade involutive complémentée* (U, n) *sur une catégorie* C, *où* U *est déterminée par une construction standard contravariante* (F, i, d), *est complètement déterminée par le triplet* $(F, i, 0)$.

En effet, étant donné $(F, i, 0)$, il suffit de prendre $F(i_c).O_c$ pour n_c et $O_c.n_c$ pour d_c, puis d'appliquer le théorème 1 pour retrouver U.

3. LE CAS ENSEMBLISTE. — Si C est $\mathcal{M}$ et U la monade involutive $B_{\mathcal{U}}$, en désignant, pour tout $X \in \mathcal{U}$, par $\complement_X$ l'application de $\mathfrak{P}(X)$ dans lui-même associant à toute partie de X la partie complémentaire dans X, on vérifie les axiomes MIC 1 à MIC 3, de sorte que $(B_{\mathcal{U}}, \complement)$ est une m. i. c. L'application O_X est alors définie par $O_X(A) = \{ A' \subset X / A' \not\subset A \}$.

Dans une m. i. c. arbitraire on désigne par $\vee_c$ le composé $F(i_c).F(d_c).d_{F(c)}$ et par $\wedge_c$ le composé $n_c.\vee_c.F(n_c)$ (on notera que $\wedge_c$ est distinct de $\vee'_c$); pour $B_{\mathcal{U}}$, $\vee_c$ est la réunion et $\wedge_c$ est l'intersection. On peut alors retrouver tous les opérateurs utiles en théorie élémentaire des ensembles, comme par exemple de « Verzahnungoperator » de J. Schmidt [2] :

$$\text{pour} \quad M \subset \mathfrak{P}(X), \qquad M^* \text{ vaut } \wedge_{\mathfrak{P}(X)}.\mathfrak{P}(d_X)(M).$$

Pour $U = B_{\mathcal{U}}$, le sens de la proposition 4 est le suivant : les termes de la théorie des ensembles que l'on peut obtenir à l'aide de l'appartenance, l'inclusion, le passage au complémentaire, les relations et le passage d'une relation à la relation réciproque, les réunions et intersections bornées, les ensembles de parties et les extensions directes aux parties de fonctions, la composition des relations, *les ensembles de parties et les extensions réciproques aux parties des fonctions, la composition des fonctions, l'égalité,* peuvent en fait être écrits à l'aide des trois derniers prédicats et du prédicat O de « *non-inclusion* ». Ainsi, par exemple, la réunion, bornée sur X, s'écrit :

$$\vee_X = F(i_X).F(O_X).F^2(i_X).F(O_X).O_{F(X)}.F(i_{F(X)}).O_{F(X)}.$$

(*) Séance du 10 septembre 1973.

[1] R. GUITART, *Comptes rendus*, 275, série A, 1972, p. 259.

[2] J. SCHMIDT, *Math. Nachnichter*, 10, 1953.

Département de Mathématiques,
Université de Paris VII,
Tour 45-55,
2, *place Jussieu,*
75005 Paris.