CATEGORIAS CANTORIANAS

por René GUITART (x)

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE,

NITEROI (BRASIL)

ENCONTRO NACIONAL DE LOGICA MATEMATICA

7 a 13 de fevereiro - 1974.

(x) Traduzido por Sonia Monnerat.

CATEGORIAS CANTORIANAS

Por René GUITART
Traduzido por Sonia MONNERAT

O - Se U é um modelo da teoria dos conjuntos (*) (Zermelo-Fraenkel) designa-se por M_U a categoria de todas as aplicações entre elementos de U; como categoria, M_U possui 3 tipos fundamentais de propriedades categóricas(i.e expressáveis na linguagem da teoria (de 1ª ordem) das categorias).

A - A categoria M_U é de limites projetivos e indutivos finitos.

B - A categoria M_U é cartesiana fechada, isto é. bi-funtor $\mathrm{Hom}: M_U^* \times M_U \to M_U$ admite o bi-funtor produto cartesiano $X : M_U \times M_U \to M_U$ como adjunto.

C - Existe em M_U um funtor sub-objeto P que a cada $X \in U$ associa o objeto de seus sub-objetos(sub-conjuntos) PX.

Bem entendido, para M_U as 3 propriedades acima não são independentes.

Uma primeira questão é saber se existe uma axiomática simples que implique A, B, e C.

Uma boa resposta é dada pela noção de topos (que nós não desenvolveremos aqui) introduzida por W. Lawvere e M. Tierney (e que generaliza a noção de topos utilizada em geometria algébrica por A. Grothendiek, entre outros).

Uma segunda questão, consiste em se perguntar se os axiomas assim dados para os topos podem ser precisados mais ainda de forma a caracterizar as categorias $\mathcal{C}$ da forma M_U para um certo modelo de Z.F.Esta era, de fato, a

(*) Em realidade nós somente utilizamos no que se segue uma pequena parte de Z.F.

questão que originou as pesquisas de Lawvere sobre os topos elementares. A resposta, afirmativa, foi dada por G. Ossius (1972).

Uma segunda possibilidade é o estudo das categorias onde é satisfeita a uma das propriedades A, B ou C.

Para A, os trabalhos existentes são muitos numerosos, do mesmo modo que para B: as categorias que satisfazem B foram examinadas e sua teoria desenvolvida desde 7 ou 8 anos, entre outros, por S. Mac Lane.

A propriedade C será objeto desta conferência.

Nosso objetivo é, pois, explicar mediante quais dados pode exprimir-se e precisar-se a propriedade C em uma categoria qualquer $\mathbb{C}$, reduzir estes dados ao mínimo, e, em seguida, dispondo na categoria $\mathbb{C}$, então dita cantoriana, desses dados verificar que partes da teoria das estruturas podem, então, ser refeitas em $\mathbb{C}$ como são em M_U.

Bem entendido, uma tal empresa tem estreita relação com a questão da teoria das relações em uma categoria.

Mas, insistamos ainda, nós queremos desenvolver nossa teoria sem nada supor, sobre $\mathbb{C}$, senão o fato de que $\mathbb{C}$ seja uma categoria e que C seja aí satisfeita.

Antes de examinar o que se passa em M_U, vejamos, ainda, outra formulação de nosso problema:

Desejamos esquecer noção de conjunto em proveito da noção de função, de morfismo. Para fazer isto supomos dispor de uma categoria $\mathbb{C}$, que pode, muito bem, a priori, ser suposta finita ou enumerável(mas não nos preocupamos aqui com a "construtividade" de $\mathbb{C}$).

Isto quer dizer que os termos do discurso se organizem em uma categoria, via enunciados $\alpha(-,-)$, $\beta(-,-$ $k(-,-,-)$ representando as fontes, alvos e compostas dos termos (assim $k(x, y, z)$ significa que z é o composto $y.x$ de y e x em $\mathbb{C}$).

Nosso problema é, então, o de encontrar os enunciados suplementares que é preciso admitir sobre os termos para descrever a propriedade C, e de precisar as relações entre esses enunciados.

Se se quer, trata-se de descrever de uma maneira interna ao modelo U, i.e., a M_U, a parte da teoria dos conjuntos que nos interessa. Esse cuidado vem ao encontro da observação de P. Lorenzen segundo a qual os modelos são dados antes da teoria.

Nota . nós daremos os exemplos na última parte da exposição.

1. O caso conjuntista (exame de M_U).

Seja U um modelo de Z.F , e denotemos simplesmente por M a categoria M_U. De que dispomos em M para precisar a propriedade C ?

Para todo $X \in U$ nós temos os conjuntos PX, P^2X .... Se $f : X \to Y$ é uma aplicação, $f \in M$, nós designamos por $Pf : PX \to PY$ a estensão direta às partes de f, e por $Ff: PY \to PX$ a extensão recíproca de f às partes. Escrevemos, às vezes, FX por PX, se $X \in U$. Se R é uma relação de X à Y, então, pensaremos R como uma aplicação $R : X \to P\,Y$, e designaremos por $I(R): Y \to PX$ a relação recíproca (oposta) de R.

Então se $R' : Y \to PZ$ é uma relação de Y para Z a relação composta de R' com R será denotada por R'oR.

Se $X \in U$, nós designaremos por

$i_X: X \to PX$ a aplicação definida por $i_X(x)=\{x\}$;

$\nu_X : PX \to PX$ a aplicação definida por $\nu_X(A)=\{x\in X \mid x \notin A\}$;

$\psi_X : PX \to P^2X$ a aplicação definida por

$$\psi_X (A) = \{ A' \in PX \mid A' \cap A \neq \phi \} ;$$

$\omega_X : PX \rightarrow P^2X$ a aplicação definida por $\omega_X(A) = \{A' / A' \not\subset A\}$.

Enfim, se $X \in U$, designamos por

$\bigvee_X : P^2X \rightarrow PX$ a aplicação definida por $\bigvee_X(\mathbb{A}) = \{x / \exists A \in \mathbb{A}, x \in A\}$,
e por
$\bigwedge_X : P^2X \rightarrow PX$ a aplicação definida por $\bigwedge_X(\mathbb{A}) = \{x / \forall A \in \mathbb{A}, x \in A\}$.

Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação, então

$F^2f : P^2X \rightarrow P^2Y$ é então a extensão recíproca da extensão recíproca Ff de f.

Por enquanto pois, temos, à nossa disposição os símbolos funcionais P, F, I, i, ν, ψ, ω, $\bigvee$ e $\bigwedge$, . , o .

Bem entendido, eles estão ligados entre si.
Por exemplo nós temos :

$$R' \circ R = \bigvee_Z \, . \, PR' \, . \, R$$

e ainda

$$Pf = Fi_Y \, . \, F^2f \, . \, \psi_X$$

Há também por exemplo,

$$\bigvee_X = Fi_X \, . \, F\psi_X \, . \, \psi_{PX}$$

e

$$\psi_X = \bigvee_{PX} \, . \, P(\psi_X \, i_X)$$

Coloca-se $\qquad \psi_X \, . \, i_X = t_X$

A aplicação $Id_{PX}: PX \twoheadrightarrow PX$ determina uma relação de $\overline{PX}$ em X denotada $\overline{PX}$, cuja relação oposto, $I(\overline{PX})$, não é outra senão t_X.

Então tem-se, por exemplo, $\psi_X = I(\overline{PX}) \circ \overline{PX}$.

2. Mônadas involutivas complementadas.

Para precisar melhor as dependências entre esses dados é preciso nos dar duas definições.

Seja $\mathbb{C}$ uma categoria.

Definição 1 - Chama-se mônada involutiva sobre $\mathbb{C}$ o dado de um par $(\mathbb{T}, I)$ onde $\mathbb{T}$ é uma mônada (i,e. uma construção standard) $\mathbb{T} = (T, \xi, \mu)$ sobre $\mathbb{C}$ e onde I é uma involução sobre a categoria de Kleisli $K\ell(\mathbb{T})$ de $\mathbb{T}$.

Lembremos que uma mônada $\mathbb{T} = (T, \xi, \mu)$ consiste em um funtor $T: \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$, e duas transformações naturais $\xi: Id_{\mathbb{C}} \twoheadrightarrow T$ e $\mu: T^2 \twoheadrightarrow T$ tal que $\mu . \mu_T = \mu . T\mu$ e que $\mu . \xi_T = \mu . T\xi = Id_T$.

Isto significa que para todos os objetos X, Y de $\mathbb{C}$ e todo morfismo $f: X \twoheadrightarrow Y$ temos os diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
T^2X \arrow[r, "T^2f"] \arrow[d, "\mu_X"'] & T^2Y \arrow[d, "\mu_Y"] \\
TX \arrow[r, "Tf"] & TY \\
X \arrow[u, "\xi_X"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "\xi_Y"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TX \arrow[drr, "\xi_{TX}"] \arrow[dr, equal, "Id_{TX}"] \arrow[ddr, "T\xi_X"'] & & \\
& TX & T^2X \arrow[l, "\mu_X"] \\
& T^2X \arrow[u, "\mu_X"'] & T^3X \arrow[l, "T\mu_X"] \arrow[u, "\mu_{TX}"']
\end{tikzcd}$$

Se $\mathbb{T}$ é uma mônada, sua categoria de Kleisli tem por morfismo os pares (r,y) onde Y é um objeto de $\mathbb{C}$ e r um morfismo em $\mathbb{C}$ de X para TY.

A composição "o" se faz segundo o desenho:

$$\begin{tikzcd}
 & & T^2Z \arrow[d, "\mu_Z"] \\
 & TY \arrow[ur, "Tr'"] & TZ \\
X \arrow[ur, "r"] & Y \arrow[ur, "r'"] &
\end{tikzcd}$$

$$(r',Z) \circ (r,Y) = (\mu_Z \,.\, Tr' \,.\, r, Z)$$

Enfim uma involução sobre uma categoria $\mathbb{K}$ é um funtor $I : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^*$ tal que $I^* \circ I = Id_{\mathbb{K}}$ e que para todo objeto X de $\mathbb{K}$ tem-se $I(X) = X$.

O exemplo fundamental de mônada involutiva é precisamente $(\overline{P}, I)$ com $\overline{P} = (P, i, \bigvee)$, com as notações introduzidas acima em $M_{\cup}$.

<u>Definição 2</u> - Chama-se <u>construção standard contravariante</u> sobre uma categoria $\mathbb{C}$ o dado de uma terna (F, i, ψ) onde F é um funtor de $\mathbb{C}$ para $\mathbb{C}^*$, onde $i = (i_X)_X$ e $\psi = (\psi_X)_X$ são duas famílias de morfismos de $\mathbb{C}$ indèxados pelos objetos de $\mathbb{C}$, tais que, para X objeto de $\mathbb{C}$, $i_X : X \longrightarrow FX$ e $\psi_X : FX \longrightarrow F^2X$, estes dados devendo satisfazer aos quatro axiomas seguintes:

(coloca-se $t_X = \psi_X . i_X$ para todo X objeto de $\mathbb{C}$)

C.S.C. 1 $\forall f \quad F^2f . t_X = t_y f$

C.S.C. 2 $\forall f \quad F^2f . \psi_X = \psi_Y . Fi_Y . F^2f . \psi_X$.

C.S.C. 3 $\forall X \quad Ft_X . t_{FX} = Id_{FX}$.

C.S.C. 4 $\forall X \quad F\psi_X . \psi_{FX} = \psi_X . Ft_X . \psi_{FX}$.

Pode-se mostrar que <u>os quatro axiomas acima são independentes</u>.

O exemplo fundamental de C.S.C. é precisamente (F, i, ψ) com as notações introduzidas acima na categoria $M_{\mathcal{U}}$.

TEOREMA PRINCIPAL - <u>Seja $\mathbb{C}$ uma categoria qualquer. Então dar uma mônada involutiva sobre $\mathbb{C}$ equivale à uma construção standard contravariante sobre $\mathbb{C}$</u> .

Está fora de cogitação dar a prova completa aqui, pois necessita umas cinquenta páginas de cálculos; e vai aparecer nos "Cahiers de topologie et géometrie différentielle".

Entretanto o ouvinte pode ver que dá o tèorema no caso $\mathbb{C} = M_{\mathcal{U}}$: entre os símbolos funcionais P, F, I, i, ν, ψ , ω , $\vee$ e $\wedge$ podemos, graças ao teorema, suprimir como re dundantes com (F,i,ψ), os símbolos P, $\vee$, I.

Resta-nos, agora, examinar o papel desempenhado por ν, ω e $\wedge$, face à (F,i,ψ), isto é, examinar como a (F,i,ψ) se pode associar a negação.

Seja (F,i,ψ) uma C.S.C. sobre $\mathbb{C}$.

Suponhamos dado para todo objeto X de $\mathbb{C}$ um morfismo $\nu_X : FX \to FX$ tal que

MIC 1 $\quad \forall f \quad \nu_X . Ff = Ff . \nu_Y$.

MIC 2 $\quad \forall X \quad \nu_X^2 = Id_{FX}$.

MIC 3 $\quad \forall X \quad F\nu_X . t_X = \nu_{FX} . t_X$.

Proposição: Sob as condições MIC 1 à MIC 3 diz-se que (F, i, ψ, ν) é uma C.S.C. complementada, e então (F,i',ψ') é uma C.S.C., colocando $i'_X = \nu_X . i_X$ e $\psi'_X = F\nu'_X . \nu_{FX} . \psi_X . \nu_X$.

Então se coloca $\omega_X = \psi_X . \nu_X$.

<u>Proposição</u>: A mônada involutiva complementada (m.i.c.) $((F, i, \psi), \nu)$ é exatamente determinada pela terna (F, i, ω).

Com efeito, sendo dado (F, i, ω) coloca-se $\nu_X = Fi_X \cdot \omega_X$. e pois $\psi_X = \omega_X \cdot Fi_X \cdot \omega_X$.

Então, pode-se, sendo dado um m.i.c. (F, i, ω), definir $\wedge_X = \nu_X \cdot \vee_X \cdot F(\nu_X)$ (notar-se-á que $\wedge_X$ é diferente de $\vee'_X$). Lembramos que $\vee_X$ pode-se escrever com auxílio de (F, i, ψ), e então, também com o auxílio de (F, i, ω): $\vee_X = Fi_X \cdot F\omega_X \cdot F^2 i_X \cdot F\omega_X \cdot \omega_{FX} \cdot Fi_{FX} \cdot \omega_{FX}$.

Vemos assim que se podem reduzir os diferentes símbolos funcionais introduzidos mais acima em $M_{\cup}$ aos 3 símbolos F, i e ω . A m.i.c. que consideramos sobre $M_{\cup}$ será designada por $(F, i, \omega)_{\cup}$.

3. Linguagem e axiomas cantorianos de ordem 0.

Seja $\mathbb{C}$ uma categoria munida de uma m.i.c.$(F,i,\omega)=\sqcup$. Designa-se por $\mathcal{L}\mathcal{C}_\sqcup$ a linguagem de ordem 0 cujos termos são os elementos de $\mathbb{C}$ e cujas fórmulas são constituídas de enunciados da forma «$A(f_1,\ldots,f_n)= B(f_1,\ldots,f_n)$» ,onde $A(f_1,\ldots,f_n)$ $(B(f_1,\ldots,f_n))$ é um termo constituído a partir dos termos $f_1,\ldots,f_n$ pela aplicação dos símbolos funcionais F,i e ω, e pela aplicação da composição de $\mathbb{C}$.

Por exemplo $A(f) \equiv Fi_Y.F^2f.\psi_{X_3}$ (*) e um tal enunciado, assim como $i_{FX}.F(f).i_Y$, $\vee_{FX}.F^3f.\psi_{FY}$ (**), bem como, se $f:X\longrightarrow Y$ e $g:Y\longrightarrow Z$ são termos tais que $g.f$ esteja definido, os enunciados : $F^2f.\psi_X.Ff.Fg.i_Z$, $Fg.\vee_Z.F^2g.F^2f.\vee_{FX}$, etc,...

Chama-se axioma cantoriano puro toda fórmula de linguagem cantoriana verdadeira para toda m.i.c.,dito de outro modo, toda consequência dos axiomas CSC1 à CSC4 e MIC1 à MIC3.

Chama-se axioma cantoriano conjuntista toda fórmula de linguagem cantoriana verdadeira para toda m.i.c. da forma $(F,i,\omega)_U$ sobre uma categoria da forma M_U .

(*) aqui, para ficar mais leve, anota-se ψ_X em vez $\psi_{\alpha(f)}$.

(**) Naturalmente $\vee_{FX}$ deve ser lido como uma abreviação.

<u>Existem axiomas cantorianos conjuntistas que não são puros</u>.

Por exemplo o axioma

$$“Pf \,.\, Ff \,.\, Pf = Pf” \quad (*)$$

Nós chamamos <u>categoria cantoriana</u> uma categoria munida de uma m.i.c. U tal que todos os axiomas cantorianos conjuntistas sejam verdadeiros em $\mathfrak{C}$.

Nós chamamos tipo de estrutura cantoriana, o dado de uma fórmula cantoriana ζ, e estrutura do tipo ζ em $\mathfrak{C}$ o dado de termos $f_1, \ldots , f_n$ tais que $\zeta\,(f_1 , \ldots , f_n)$ sejam verdadeiros.

O problema é então saber quais tipos de estruturas usuais em matemática são cantorianos , isto é, admitem uma definição na linguagem de ordem 0 (sem quantificador) $\zeta\,\mathfrak{C}$ $\sqcup$.

Por exemplo o tipo de estrutura "relação de equivalência" é cantoriano (o axioma é $E\,(f) \equiv “f = Ff.i_{FX}.f”$) (para $f : X \longrightarrow FX$) enquanto o tipo de estrutura "relação reflexiva" não é cantoriano.

(*) a demonstração de impureza faz-se exibindo-se sobre um grupo considerado como uma categoria uma m.i.c. na qual a fórmula considerada é falsa.

Um exemplo muito importante do tipo de estrutura cantoriana é a noção de topologia deformada, isto é, de espaço topológico menos o axioma $A \subset \overline{A}$, conservando os outros axiomas de Kuratowski ; a noção de aplicação contínua entre topologias deformadas, é , ainda , cantoriana.

Assinalemos também o problema da especificação de certos termos, como por exemplo ϕ :

Se $\mathcal{V} = (F, i, \psi_1)$ é uma mônada involutiva sobre $\mathbb{C}$ nós chamaremos objeto vazio de $\mathbb{C}$ um objeto $\ominus$ de $\mathbb{C}$ tal que

$$\psi_{P(\ominus)} = P\,(i_{P(\ominus)}).$$

Coloca-se $\div = P\ominus$, $\mathcal{Q} = P \div$. etc ...
(um objeto vazio pode eventualmente possuir alguns pontos!)

Exemplos elementares de m.i.c.

1) Se G é um grupo coloca-se $\alpha(x) = e = \beta(x)$ para todo $x \in G$, de forma que G é uma categoria com um só objeto e . Então dar uma m.i. sobre G equivale dar um par (h,a) onde $a \in G$ e $h: G \longrightarrow G$ é um automorfismo tal que, colocando $b = h\,(a).\,a$, h^2 seja o automorfismo interior associado à b.

2) Se $(E, \leq)$ é um conjunto ordenado existe sobre $(E, \leq)$

uma m.i. se e somente se $(E, \leq)$ é uma "floresta plantada".

3) Se $A = (\underline{A}, +, \cdot)$ é um semi-anel comutativo unitário finito, determina-se, então, uma mônada involutiva $\amalg_A$ sobre a categoria dos A-módulos finitos, a involução I correspondendo à transposição das matrizes.

4) Se $\mathbb{C}$ é uma categoria e $\amalg$ uma m.i.c. sobre $\mathbb{C}$ então, define-se, para todo conjunto I uma m.i.c $\mathbb{U}^I$ sobre $\mathbb{C}^I$.

Uma questão importante é munir uma categoria $\mathcal{C}$ de aplicações contínuas entre espaços topológicos de uma estrutura de m.i.c., ou mesmo de categoria cantoriana. Eu terminei esta questão mas não posso falar dela aqui por causa do tempo, préfiro concluir com algumas palavras sobre a construção que desenvolvi no parágrafo 2.

Essencialmente do ponto de vista da teoria dos conjuntos, nós partimos da teoria das relações e a abstraimos para uma categoria qualquer $\mathbb{C}$; pode-se, então, refazer em $\mathbb{C}$ tudo que se faz na ordem 0 na teoria dos conjuntos e repousa sobre a teoria das relações; isto é, refazem-se as coisas que classicamente eram de ordem 1, dito de outra forma, eliminou-se " na vizinhança da teoria das relações" (sic!) os quantificadores. Parece claro que a mesma operação pode ser realizada partindo-se de não importa qual teoria inclusive estritamente na teoria dos conjuntos. Isto é, a teoria dos conjuntos é localmente de ordem 0.(SIC)

Quero terminar agradecendo à Universidade Federal Fluminense, e particularmente a seu Reitor, Jorge Emmanuel Barbosa, por sua acolhida simpática em Niterói.

Nota : A maior parte dos resultados desta conferência foram anunciados em algumas notas das C.R A.S. de Paris em 1972 e 1973.