ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Constructions de monades involutives.* Note (*) de M. René Guitart, présentée par M. Szolem Mandelbrojt.

On indique deux constructions permettant d'obtenir des monades involutives. En particulier on voit apparaître dans les ensembles les monades involutives associées aux treillis locaux, ainsi que l'objet simplicial des monades involutives $U_{\mathscr{N}}$ associées aux entiers.

Cette Note fait suite à (1).

Si $(P, i, V) = \bar{P}$ et $(P', i', V') = \bar{P}'$ sont des monades sur une catégorie C, un morphisme $\bar{m}$ de $\bar{P}$ vers $\bar{P}'$ est déterminé par une transformation naturelle m de P vers P' telle que $m.i = i'$ et que $m.V = V'.P'm.m_P$. On note alors $\mathrm{Kl}(\bar{m})$ le foncteur induit de $\mathrm{Kl}(\bar{P})$ (catégorie de Kleisli de $\bar{P}$) vers $\mathrm{Kl}(\bar{P}')$.

Si U et U' sont deux monades involutives sur C présentées sous les formes $(\bar{P}, I)$ ou (F, i, d) et $(\bar{P}', I')$ ou (F', i', d') [*voir* (1)], un morphisme de U vers U' est déterminé par un morphisme $\bar{m}$ de $\bar{P}$ vers $\bar{P}'$ tel que $\mathrm{Kl}(\bar{m}) \circ I = I' \circ \mathrm{Kl}(\bar{m})$ ou bien, ce qui est équivalent tel que m détermine une transformation naturelle de F vers F' et que $m_F.t = F'm.t'$. Les morphismes entre monades involutives sur C forment une catégorie notée MI (C).

Dans la suite on désigne par C une catégorie quelconque, et par $U = (F, i, d) \cong ((P, i, V), I)$ une monade involutive sur C.

On note $\mathscr{U}$ un univers, $\mathscr{M}_{\mathscr{U}}$ ou $\mathscr{M}$ la catégorie d'applications associée, et $U_2 = (2^-, \gamma_2, d_2) \cong ((\mathfrak{P}_2, \gamma_2, \cup_2), I)$ la monade involutive des parties [notée $B_{\mathscr{U}}$ dans (1)] sur $\mathscr{M}$.

1. Les monades $U_2^{(\mathscr{A})}$ associées aux ordres. — Soit G de C vers D un foncteur ayant un adjoint G'; soit ε de but $G \circ G'$ et η de source $G' \circ G$ les morphismes définissant l'adjonction, laquelle est notée $(G, G', \varepsilon, \eta) = g$. On désigne par $g\,F$, $g\,P$, gi, $g\,V$, gt, gd et $g\,\bar{P}$ respectivement les termes $G \circ F \circ G'$, $G \circ P \circ G'$, $G(i_{G'}).\varepsilon$, $G(V_{G'}.P(\eta_{PG'}))$, $G(F(\eta_{PG'}).t_{G'})$, $(g\,V)_{gP}.g\,P(gt)$ et le triplet $(g\,P, gi, g\,V)$. On vérifie que $g\,\bar{P}$ est une monade sur D, et on note donc $\mathrm{Kl}(g\,\bar{P})$ sa catégorie de Kleisli.

Si $\bar{r}$ est un morphisme dans $\mathrm{Kl}(g\,\bar{P})$ de a vers b défini par le morphisme r de a vers $(g\,P)(b)$, dans D, on note $(g\,I)(\bar{r})$ le morphisme de $\mathrm{Kl}(g\,\bar{P})$ défini par le morphisme $(g\,F)(r).(gt)_b$ de D.

Proposition 1. — *Les données* $(g\,\bar{P}, g\,I)$ *et* $(g\,F, gi, gd)$ *sont les deux présentations d'une monade involutive, notée* $g\,U$, *sur* D *que l'on appelle image de* U *par l'adjonction* g. *Alors, en associant à un morphisme* $\bar{m}$ *de* U *vers* U' *le composé* $G\,\bar{m}\,G'$, *noté* $g\bar{m}$, *on détermine un foncteur* MI (g) *de* MI (C) *vers* MI (D).

Si A est un ensemble et C^A la catégorie produit de A exemplaires de C, si pour $t \in C^A$ $f \in (C^A)_0$ et $a \in A$ on définit $(F)_A(t)$, $(i)_{A_f}(a)$ et $(d)_{A_f}(a)$ comme égaux à $F.t$, $i_{f(a)}$ et $d_{f(a)}$ respectivement, alors $((F)_A, (i)_A, (d)_A)$ est une monade involutive notée $(U)_A$ sur C^A.

Si C est à A-produits, on note Δ_A^C la diagonale de C vers C^A qui est donc adjointe au foncteur produit Π_A^C, cette adjonction étant notée $(\Pi_A^C, \Delta_A^C, \varepsilon, \eta) = (-)^{A\cdot}$. En appliquant la proposition 1 à $(U)_A$ et $(-)^A$, on obtient sur C la monade involutive $((U)_A)^A$ que l'on notera simplement $U^{(A)} = (F^{(A)}, i^{(A)}, d^{(A)})$.

Supposons maintenant que $C = \mathcal{M}_{\mathfrak{U}}$ et que $U = U_2$.

Les ensembles ordonnés sont notés $(A, \leqq) = \mathcal{A}$; si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des ensembles ordonnés, $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ désignera l'ensemble des applications croissantes de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ muni de l'ordre produit usuel. Un ensemble A muni de l'ordre chaotique sera encore noté A.

Si $(A, \leqq) = \mathcal{A}$ est un ordre, on désigne, pour tout ensemble X, par $F^{(\mathcal{A})}(X)$ l'ensemble des $f \in F^{(A)}(X)$ qui définissent des applications croissantes de $\mathcal{A}$ vers $(\mathfrak{P}(X), \subset)$. On détermine ainsi une sous-nomade involutive $(U_2)^{(\mathcal{A})}$ de $(U_2)^{(A)}$.

2. Les monades $U_{\mathcal{O}}$ associées aux sup-monoïdes abéliens. — Soit $\mathcal{O} = (\underline{\mathcal{O}}, S, k, o, e)$ un quintuplet, où $\underline{\mathcal{O}}$ est un ensemble, S une application de $\mathfrak{P}(\underline{\mathcal{O}})$ vers $\underline{\mathcal{O}}$, k une application de $\underline{\mathcal{O}}^2$ vers $\underline{\mathcal{O}}$, o et e des éléments de $\underline{\mathcal{O}}$. On désigne par $\mathcal{O}^-$ le foncteur contravariant $\mathrm{HOM}_{\mathcal{M}}(\underline{\mathcal{O}}, -)$ et pour tout X par $\mathcal{O}^X$ l'ensemble des applications de X dans $\underline{\mathcal{O}}$.

On note $\gamma_{\mathcal{O}_X}$ l'application de X dans $\mathcal{O}^X$ telle que $\gamma_{\underline{\mathcal{O}}_X}(x)(x')$ soit égal à e si $x = x'$ et à o sinon.

On définit l'application $d_{\mathcal{O}_X}$ de $\mathcal{O}^X$ vers $\mathcal{O}^{(\mathcal{O}^X)}$ par

$$d_{\mathcal{O}_X}(p)(p') = S(\{k(p(x), p'(x))/x \in X\}).$$

Théorème 2. — *Le triplet $(\mathcal{O}^-, \gamma_{\mathcal{O}}, d_{\mathcal{O}})$ est une monade involutive sur $\mathcal{M}_{\mathfrak{U}}$ si et seulement si :*

(1) *$\underline{\mathcal{O}}$ est un treillis complet,* S *est l'application* Sup *de ce treillis et o en est le plus petit élément.*

(2) *k est une loi de monoïde abélien sur $\underline{\mathcal{O}}$ d'unité e.*

(3) *k est compatible avec* S, *i. e., en notant $v_{\mathcal{O}}$ l'injection canonique de $\mathfrak{P}(\underline{\mathcal{O}}) \times \mathfrak{P}(\underline{\mathcal{O}})$ vers $\mathfrak{P}(\underline{\mathcal{O}} \times \underline{\mathcal{O}})$, les composés $k \circ (S \times S)$ et $S \circ \mathfrak{P}(k) \circ v_{\mathcal{O}}$ sont égaux.*

$\mathcal{O}$ est alors appelé un sup-*monoïde abélien.*

Comme exemples de sup-monoïde abélien citons l'intervalle $[0, 1]$ avec l'ordre et la multiplication usuels des réels. Citons également les treillis locaux (treillis complets distributifs) en y prenant comme multiplication k l'opération inf; les algèbres de Boole complètes sont naturellement dans ce cas.

Pour tout entier n on désignera par $\mathcal{N}$ l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ muni de l'ordre naturel, et par $U_{\mathcal{N}}$ la monade involutive associée par le théorème 2.

Proposition 3. — *Sur la catégorie $\mathcal{M}_{\mathfrak{U}}$, si $\mathcal{A}$ est un ensemble ordonné, les monades involutives $(U_2)^{(\mathcal{A})}$ et $U_{2^{\mathcal{A}}}$ sont isomorphes.*

Il n'y aura donc pas d'inconvénient par la suite à noter l'une ou l'autre sans parenthèses, ce que l'on fera désormais. Par exemple, puisque $2^2 = 3$, $2^3 = 4$, etc., on pourra calculer U_3, U_4 comme U_2^2, U_2^3, etc.

Soit $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux sup-monoïdes abéliens et m un morphisme de $\mathcal{O}_1$ vers $\mathcal{O}_2$, c'est-à-dire $\overline{m}$ est déterminé par une application m de $\underline{\mathcal{O}}_1$ vers $\underline{\mathcal{O}}_2$ sup-compatible qui définit un morphisme entre les monoïdes. Pour tout ensemble X on note m_X l'application de $\mathcal{O}_1^X$ vers $\mathcal{O}_2^X$ qui à tout f associe $m \circ f$.

PROPOSITION 4. — $(m_X)_{X \in \mathcal{U}}$ *détermine un morphisme* $U_{\bar{m}}$ *de* $U_{\mathcal{C}_1}$ *vers* $U_{\mathcal{C}_2}$, *et en associant à tout* $\bar{m}$ *le morphisme* $U_{\bar{m}}$, *on détermine un foncteur noté* U *de la catégorie* $SMA_{\mathcal{U}}$ *de morphismes entre* sup-*monoïdes abéliens associée à* $\mathcal{U}$ *vers la catégorie* MI $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}})$.

De là on déduit aisément que les $U_{\mathcal{N}}$, $n \in N$, sont les « sommets » d'un objet simplicial dans la catégorie des monades involutives sur $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$.

(*) Séance du 1er juillet 1974.

(1) R. GUITART, *Comptes rendus*, 277, série A, 1973, p. 935.

U. E. R. de Mathématiques,
Université de Paris-VII,
Tour 45-55,
2, *place Jussieu,*
75221 *Paris-Cedex.*