ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Traduction équationnelle de notions ensemblistes.*

Note (*) de M. **René Guitart**, présentée par M. René Garnier.

On montre comment le contexte des monades involutives permet de traduire, comme solutions de simples équations, de nombreuses notions ensemblistes, telles les points, les ordres, les compacts. A cet effet on dégage comme outil la notion de monade virtuelle, utile spécialement dans les catégories sans noyaux.

Cette Note fait suite à ([1]) et ([2]).

1. LE TYPE D'ÉQUATIONS CONSIDÉRÉ. — Soit $\hat{\mathscr{U}}$ un univers, et MI la catégorie dont les objets sont les monades involutives $U = (\overline{P}, I) \simeq (F, i, d)$ sur des catégories C_U éléments de $\hat{\mathscr{U}}$, un morphisme de U vers U' étant déterminé par un morphisme strict de $\overline{P}$ vers $\overline{P}'$ commutant avec les involutions I et I'. On note GOS la catégorie ayant pour objets les $(\underline{G}, s) = G$, où $\underline{G}$ est un graphe orienté élément de $\hat{\mathscr{U}}$ et s une application de l'ensemble $\underline{G}_0$ des sommets de $\underline{G}$ dans $\underline{G}_0$; un morphisme de G vers G' est déterminé par un morphisme de $\underline{G}$ vers $\underline{G}'$ commutant avec s et s'. Soit p le foncteur d'oubli de MI vers GOS qui à U associe $([C_U], P_0)$, où $[C_U]$ est le graphe sous-jacent à C_U et P_0 la restriction de P à $(C_U)_0$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout* $G \in GOS_0$ *on peut construire par récurrence une p-structure libre* $\langle G \rangle$ *engendrée par* G.

On appelle MI-*formule* un triplet $(G, e_1, e_2) = e$, où $G \in GOS_0$ et où $e_1, e_2 \in C_{\langle G \rangle}$ (ce sont donc des « chemins » d'éléments de $\underline{G}$ et de symboles F, i, d); et, si $U \in MI_0$, pour tout morphisme m de G vers p (U), la formule « $\overline{m}(e_1) = \overline{m}(e_2)$ » (où $\overline{m}$ est le foncteur de $C_{\langle G \rangle}$ vers C_U associé à m par l'adjonction) est notée me et appelée *interprétation de e par m dans* U. Pour $X \subset MI_0$ on dit que e est X-*valide* si pour tout $U \in X$ et toute interprétation m de e dans U la formule me est vraie.

Soit Ens_n l'ensemble des $U_{\mathscr{N}}(\mathscr{U})$ [*cf.* ([2])] sur les catégories $\mathscr{M}_{\mathscr{U}}$, où $\mathscr{U}$ est un univers élément de $\hat{\mathscr{U}}$. Dans ([3]) on a proposé d'appeler cantorienne toute U où est valide toute MI-formule finie Ens_2-valide. On ne sait si la monade involutive U (E) associée à un topos E est cantorienne.

2. LA TRADUCTION. — Soit e une MI-formule, F (x) et F' (x') deux formules de la théorie des ensembles (Zermelo-Fraenkel), $\mathscr{U}$ un univers. On définit l'énoncé (sur $\mathscr{U}$) $T_{(e, F', \mathscr{U}, n)}(x)$ en le déclarant satisfait si F' (x') est satisfaite et s'il existe une interprétation valide de e dans $U_{\mathscr{N}}(\mathscr{U})$. Si F et $T_{(e, F', \mathscr{U}, n)}$ sont équivalents dans $\mathscr{U}$, on écrit $F \sim T_{(e, F', \mathscr{U}, n)}$. On définit une congruence t_n entre formules en posant $F \sim F'(t_n)$ si pour tout $\mathscr{U}$ il existe e et e' telles que $F \sim T_{(e, F', \mathscr{U}, n)}$ et que $F' \sim T_{(e', F, \mathscr{U}, n)}$. Par exemple $F \sim F'(t_2)$ si les formules F (x) et F' $((x_1, x_2))$ expriment, la première que x est une relation réflexive, et la seconde que x_1 est une relation plus fine que x_2.

Si v est la formule « vrai », une formule $F \sim v(t_2)$ sera dite MI-*équationnelle*, et pour tout $\mathscr{U}$, tout e telle que $F \sim T_{(e, v, \mathscr{U}, 2)}$ sera appelée traduction équationnelle [dans $U_2(\mathscr{U})$] de F, ou MI-*équation de* F.

On définit les MIC-formules et les formules MIC-équationnelles en partant, dans ce qui précède, des monades involutives complémentées.

PROPOSITION 2. — *Les équations suivantes sont* Ens_2*-valides et sont valides dans* U (E) *pour tout topos* E, *mais ne sont pas valides dans une monade involutive quelconque; en fait les trois dernières sont équivalentes entre elles et appelées formules de quasi-inversion ou formules d'adjonction :*

$$F(d_c).i_{F^2(c)}.d_c = i_{F(c)}; \qquad F(i_{F(c)}).F^3(i_c).d_{F^2(c)}.F^2(i_c) = F^2(c);$$

$$P_U(f).F(f).P_U(f) = P_U(f); \qquad F(f).P_U(f).F(f) = F(f);$$

$$F^2(f).d_{\alpha(f)}.F(f).i_{\beta(f)}.f = t_{\beta(f)}.f.$$

PROPOSITION 3. — *Les notions d'injection, surjection, bijection, ensemble vide, singleton, carré faiblement cartésien, congruence, image directe ou réciproque d'une relation par une fonction, treillis complet, algèbre de Boole complète atomique sont définissables par des formules* MI-*équationnelles. La notion d'ordre est* MIC-*équationnelle.*

3. LES MONADES VIRTUELLES. — Soit C une catégorie, V = (T, u, m, a) un quadruplet, où T est un foncteur de C vers C, où pour tout $c \in C_0$, u_c, m_c et a_c sont des morphismes de c vers T (c), de T^2 (c) vers T (c) et de T (c) vers T (c). Alors $a_{T(c)}.T(a_c)$ est noté a'_c et $a'_{T(c)}.T^2(a_c)$ est noté a''_c.

On appelle V une *monade virtuelle sur* C si pour tout f de c vers c' on a les équations,

$$a_{c'}.T(f).a_c = T(f).a_c; \qquad a_{c'}.u_{c'}.f = T(f).a_c.u_c;$$

$$a_{c'}.m_{c'}.T(a_{c'}).T^2(f).a'_c = T(f).a_c.m_c.a'_c;$$

$$a_c.a_c = a_c = a_c.m_c.T(a_c).T(u_c).a_c = a_c.m_c.a_{T(c)}.u_{T(c)}.a_c;$$

$$a_c.m_c.a_{T(c)}.m_{T(c)}.T(a_{T(c)}).a''_c = a_c.m_c.T(a_c).T(m_c).a''_c.$$

On appelle V-*algèbre* un couple (c, x), où $c \in C_0$ et où x est un morphisme de T (c) vers c tel que $x.a_c = x$, que $x.u_c = c$ et que $x.T(x).a'_c = x.m_c.a'_c$; et un morphisme de (c, x) vers (c', x') est déterminé par un morphisme f de c vers c' tel que $x'.T(f) = f.x$.

Si C est à noyaux, on note j_c le noyau de a_c et T (c) et s_c le morphisme tel que $j_c.s_c = a_c$. On pose

$$u'_c = s_c.u_c, \qquad m'_c = s_c.m_c.T(j_c).j_{\alpha(j_c)} \qquad \text{et} \qquad A(f) = s_{c'}.T(f).j_c.$$

PROPOSITION 4. — *Si* C *est à noyaux d'idempotents et si* V *est une monade virtuelle, alors* $\overline{A}$ = (A, u', m') *est une monade sur* C *et la catégorie des* V-*algèbres est une sous-catégorie pleine de la catégorie des* $\overline{A}$-*algèbres; ces deux catégories sont égales par exemple si* a *définit une transformation naturelle de* T *vers* T.

4. APPLICATION. — Si $\overline{M}$ est une monade dans $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ de la forme $\overline{A}$ associée à un V dans lequel $T = 2^{(2^{(-)})}$ et où u, m et a sont des composés des 2^{-}, γ_2 et d_2, on sait montrer que les algèbres de $\overline{M}$ sont définissables par des formules MI-équationnelles. Cela s'applique par exemple pour la monade $(-)+1$ et pour la monade des ultrafiltres :

PROPOSITION 5. — *La notion d'ensemble pointé est* MI-*équationnelle.*

PROPOSITION 6. — *La notion d'espace compact est* MIC-*équationnelle.*

Les notions ci-dessus traduisibles en MI-formules (propositions 3, 5, 6) *admettent* en fait chacune *une infinité de traductions* équationnelles non équivalentes, i.e. d'équations dont les interprétations ailleurs que dans un $U_2(\mathscr{U})$ ne sont pas nécessairement des formules équivalentes. Par exemple parmi les différentes équations possibles de la notion de point il n'y en a pas une de « canonique ».

(*) Séance du 8 juillet 1974.

[1] R. GUITART, *Comptes rendus*, 277, série A. 1973, p. 935.

[2] R. GUITART, *Comptes rendus*, 279, série A, 1974, p. 491.

[3] R. GUITART, *Categorias cantorianas* (*Encontro nacional de Logica matematica*, U. F. F., Niteroi, Brésil, février 1974).

Département de Mathématiques,
Université Paris VII,
Tour 45-55,
2, *place Jussieu,*
75005 *Paris.*