C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 1398-1401 (1er juin 1970). **Série A**

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Problèmes universels associés à quelques catégories d'applications*. Note (*) de M. **René Guitart**, présentée par M. René Garnier.

Existence d'adjoints ou coadjoints pour différents foncteurs liant entre elles certaines catégories de relations, des catégories d'applications continues et des catégories d'homomorphismes d'anneaux.

1. Soit $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ deux univers tels que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et que $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$, et $\mathfrak{M}^0$ (resp. $\hat{\mathfrak{M}}^0$) la catégorie pleine d'applications au-dessus de $\mathfrak{M}_0$ (resp. $\hat{\mathfrak{M}}_0$). On note $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})^0$ la sous-catégorie de $\mathfrak{M}^0$ formée des applications extensions aux parties, et $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{M})^0$ celle formée des applications images réciproques (le foncteur partie sur $\mathfrak{M}^0$ sera désigné par $\mathfrak{P}$). On introduit également la sous-catégorie $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})^0$ de $\mathfrak{M}^0$ constituée des triplets $(\mathfrak{P}(F), \mathfrak{f}, \mathfrak{P}(E))$, où E et F sont des éléments de $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{f}$ le graphe d'une application f de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ croissante et admettant une application croissante $\star(f)$ adjointe, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall F' \subset F, \quad (f \circ \star(f))(F') \subset F' \quad \text{et} \quad \forall E' \subset E, \quad (\star(f) \circ f)(E') \supset E'.$$

Quand $\star(f)$ existe, elle est unique de sorte que $\star$ est bien définie sur $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})$. On vérifie aisément que les éléments de $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})$ sont exactement les applications entre ensembles de parties compatibles avec les les réunions, si bien que $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})^0$ est isomorphe dans $\hat{\mathfrak{M}}^0$ à la catégorie $\mathfrak{M}^{r0}$ des relations sur $\mathfrak{M}_0$, un isomorphisme de source $\mathfrak{M}^{r0}$ étant par exemple le foncteur J défini par

$$\forall E' \subset E, \quad \mathbf{J}((F, \mathbf{R}, E))(E') = \{y \in F / (\exists x \in E')((y, x) \in \mathbf{R})\}.$$

L'image $\mathfrak{I}_a^*(\mathfrak{M})^0$ de $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})^0$ par $\star$ dans $\hat{\mathfrak{M}}^0$ consiste en la sous-catégorie de $\mathfrak{M}^0$ formée des applications entre ensembles de parties compatibles avec les intersections. On remarquera que

$$\mathfrak{P}^*(\mathfrak{M})^0 = \mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})^0 \cap \mathfrak{I}_a^*(\mathfrak{M})^0.$$

On note $\mathbf{P}^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{M}^0$ engendrée par $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})^0_0$. On définit un foncteur d de $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})^0$ vers elle-même en posant

$$\forall y \in F, \quad d(f)(\{y\}) = \{x \in E / y \in f(\{x\})\}.$$

On pose $\Lambda = \star \circ d$ et $V = \Lambda^{-1}$.

Pour une application quelconque f de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ on définit les applications $K(f)$ et $K'(f)$ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ par

$$\forall E' \subset E, \quad K(f)(E') = F - \bigcap_{x \in E'} f(E - \{x\})$$

et

$$\forall E' \subset E, \quad K'(f)(E') = F - f(E - E').$$

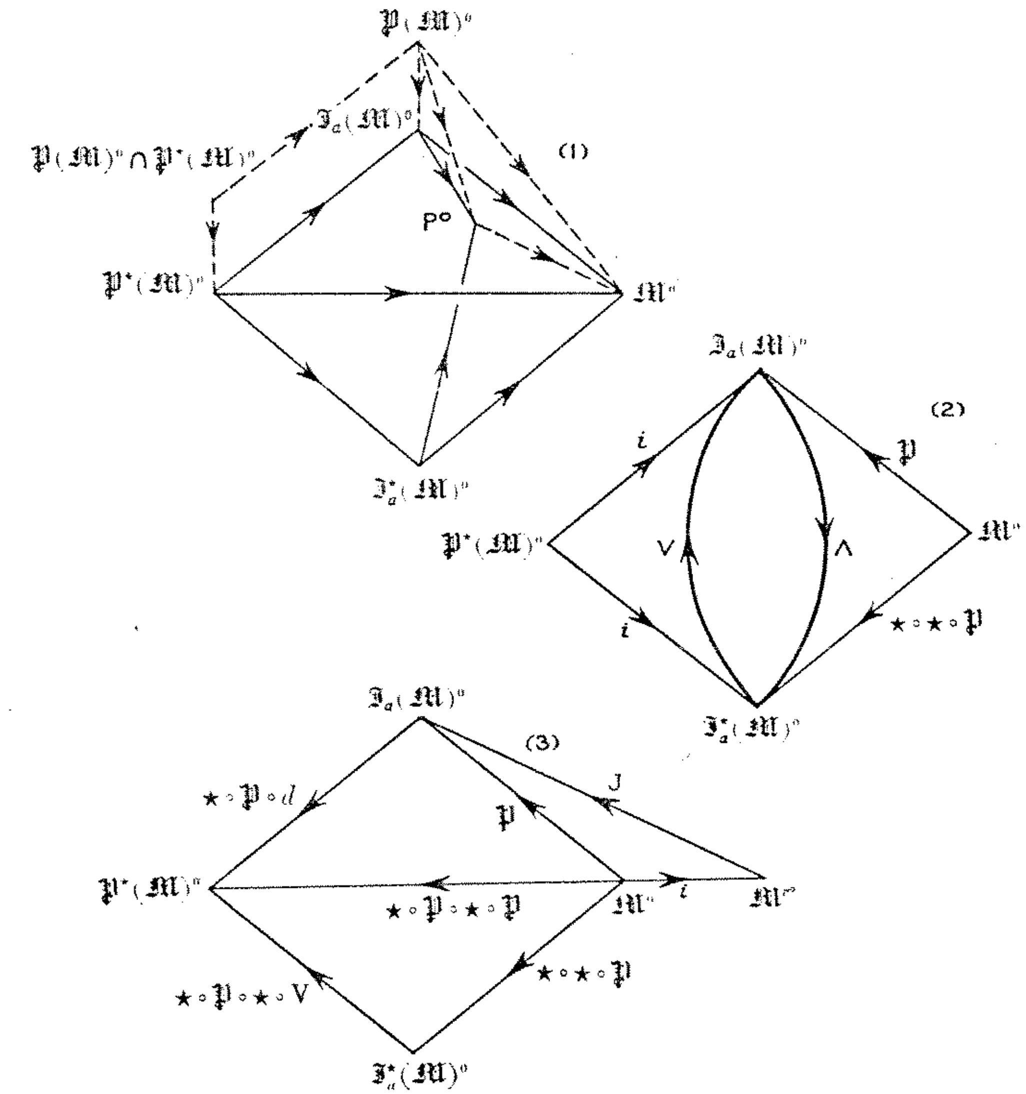

Fig. 1, 2, et 3.

K ou K′ restreint à $\mathfrak{I}_a^*(\mathfrak{M})$ est identique à V, et K′ restreint à $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})$ est identique à Λ.

La catégorie $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})^0$ est à I-produits et à I-sommes pour tout $I \in \mathfrak{M}_0$: $\mathfrak{P}\left(\sum_{i\in I} E_i\right)$ est un produit de $(\mathfrak{P}(E_i))_{i\in I}$, naturalisé par les $(\star\circ\mathfrak{P})(s_i)$, s_i étant l'injection canonique de E_i dans $\sum_{i\in I} E_i$; c'est aussi une somme de $(\mathfrak{P}(E_i))_{i\in I}$ naturalisée par les $\mathfrak{P}(s_i)$ (*voir* aussi Davar-Panah, *Thèse de* 3e *cycle*, Paris, 1968). Par contre, on peut donner des exemples montrant que cette *catégorie n'est ni à noyau, ni à conoyau, ni à image, ni à coimage.*

2. On sait que, pour toute catégorie $C^\cdot$, le triplet $(C^\cdot \times C^\star, C, k_{C^\cdot})$ définit une espèce de structure $\eta(C^\cdot)$ pour la composition :

$$k_{C^\cdot}((f, g), h) = f.h.g.$$

La sous-catégorie $\mathfrak{P}^\star(\mathfrak{M})^0 \times \mathfrak{P}(\mathfrak{M})^{0\star}$ de $\mathfrak{J}_a(\mathfrak{M})^0 \times \mathfrak{J}_a(\mathfrak{M})^{0\star}$ définit une sous-espèce de structure de $\eta(\mathfrak{J}_a(\mathfrak{M})^0)$ qui, de plus, est $(\mathfrak{M}^0, \iota, \mathfrak{P}^\star(\mathfrak{M})^0)$-dominée ; cette dernière est isomorphe à l'espèce de structure $(\mathfrak{M}^{0\star 2}, \mathfrak{M}^r, k)$, où k est définie par

$$k((f, g), R) = J^{-1}((\star \circ \mathfrak{P})(f) \circ J(R) \circ \mathfrak{P}(g))$$
$$[\text{resp. } k((f, g), R) = ((\star \circ \mathfrak{P})(f \times g))(\mathbf{R})].$$

Les liens entre les différentes catégories introduites se trouvent encore mieux précisés par les résultats ci-dessous :

Proposition 1. — *Dans le diagramme commutatif (fig. 1) où les flèches représentent des foncteurs injections canoniques, les foncteurs admettant un adjoint sont en traits pleins. Le seul foncteur ayant un coadjoint est* $(\mathfrak{J}_a(\mathfrak{M})^0, \iota, \mathfrak{P}(\mathfrak{M})^0)$, *tous les autres sauf* $(\mathfrak{M}^0, \iota, \mathbf{P}^0)$ *n'admettant même pas de semi-coadjoint. Ce dernier est aussi le seul des foncteurs représentés à admettre un semi-adjoint sans admettre d'adjoint.*

Proposition 2. — *Les catégories* $\mathfrak{J}_a(\mathfrak{M})^0$ *et* $\mathfrak{J}_a^\star(\mathfrak{M})^0$ *sont autoduales et isomorphes, un isomorphisme entre ces deux catégories étant établi par les foncteurs* Λ *et* V, *foncteurs qui rendent par ailleurs commutatif le diagramme de la figure 2, où* $\mathfrak{P}$ *et* $\star \circ \star \circ \mathfrak{P}$ *sont des adjoints à* $(\mathfrak{M}^0, \iota, \mathfrak{J}_a(\mathfrak{M})^0)$ *et à* $(\mathfrak{M}^0, \iota, \mathfrak{J}_a^\star(\mathfrak{M})^0)$ *s'insérant aussi dans le diagramme commutatif de foncteurs adjoints (fig. 3).*

3. Rapport avec les espaces et anneaux de Boole. — Soit 2 l'ensemble à 2 éléments $\{0, 1\}$. Notons $\bar{2}$ l'espace topologique discret sur 2 (resp. le seul anneau booléien sur 2 ayant 1 pour unité). Pour un anneau B on désignera par $X(B)$ le sous-espace topologique du produit $\bar{2}^B$ ayant pour éléments les morphismes unitaires d'anneaux de B dans $\bar{2}$. Pour un espace topologique X on notera $B(X)$ le sous-anneau de l'anneau produit $\bar{2}^X$ constitué des applications continues de X dans $\bar{2}$. Si nous notons $\mathfrak{A}^0$ la catégorie des anneaux unitaires et morphismes unitaires d'anneaux, et $\mathfrak{T}^0$ la catégorie des espaces topologiques et applications continues, on définit deux foncteurs X et B par

$$\forall f = (B', \mathbf{f}, B) \in \mathfrak{A}, \quad X(f) = (X(B), X(\mathbf{f}), X(B')) \in \mathfrak{T} \quad \text{avec } X(\mathbf{f})(u) = u \circ f;$$
$$\forall h = (X', \mathbf{h}, X) \in \mathfrak{T}, \quad B(h) = (B(X), B(\mathbf{h}), B(X')) \in \mathfrak{A} \quad \text{avec } B(\mathbf{h})(v) = v \circ h.$$

Désignons par $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}^0$ ayant pour unités les anneaux de Boole, et par $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{T}^0$ définie par les espaces topologiques booléiens. Si nous notons $'X$ la restriction de X à $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^0$ et $'B$ la restriction de B à $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^0$ on établit, en utilisant l'isomorphisme de Stone d'un anneau de Boole sur un anneau de parties, que les foncteurs $'X^\star$ et $'B$ définissent une équivalence entre les catégories $\mathfrak{AB}^{0\star}$ et $\mathfrak{TB}^0$. Désignons enfin par $\mathfrak{TC}^0$ la catégorie des applications continues entre espaces compacts et par $\mathfrak{TO}^0$ celle des applications continues entre espaces totalement discontinus. On sait (théorème de Stone-Čech) que $(\mathfrak{T}^0, \iota, \mathfrak{TC}^0)$ admet un adjoint.

Proposition 3. — *Les foncteurs injections canoniques de $\mathfrak{AB}^0$ dans $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{TC}^0$ dans $\mathfrak{T}^0$, $\mathfrak{TO}^0$ dans $\mathfrak{T}^0$, $\mathfrak{TB}^0$ dans $\mathfrak{T}^0$, $\mathfrak{TB}^0$ dans $\mathfrak{TC}^0$, $\mathfrak{TB}^0$ dans $\mathfrak{TO}^0$ ont des adjoints. L'injection canonique de $\mathfrak{TB}^0$ dans $\mathfrak{T}^0$ n'a pas de coadjoint. Enfin le foncteur $(\mathfrak{TB}^0, {}'X^\star \circ \iota, \mathfrak{AB}^{0\star})$ a un adjoint et un coadjoint.*

Corollaire. — *Un espace topologique possède n composantes connexes si et seulement si son compactifié de Stone-Čech possède n composantes connexes.*

Si $f = (\mathfrak{P}(F), \mathfrak{f}, \mathfrak{P}(E)) \in \mathfrak{P}^\star(\mathfrak{M})$, alors f définit un morphisme unitaire entre les anneaux de Boole définis par $\mathfrak{P}(E)$ et $\mathfrak{P}(F)$; on définit ainsi un foncteur j de $\mathfrak{P}^\star(\mathfrak{M})^0$ vers $\mathfrak{AB}^0$. Si l'on note $\theta_{\mathfrak{TB}^0}$ le foncteur d'oubli de $\mathfrak{TB}^0$ vers $\mathfrak{M}^0$, on démontre :

Proposition 4. — *Le foncteur j admet $\star \circ \mathfrak{P} \circ \theta^\star_{\mathfrak{TB}^0} \circ {}'X$ pour adjoint.*

(*) Séance du 11 mai 1970.

(*Département de Mathématiques,*
Faculté des Sciences,
33, *rue Saint-Leu,*
80-*Amiens, Somme.*)

181934. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.