2^e COLLOQUE SUR L'ALGEBRE DES CATEGORIES (AMIENS 1975)

UN CONTEXTE ADAPTE AUX RELATIONS CONTINUES

par René GUITART

La théorie des relations continues telle qu'elle est développée dans [1], n° II, peut être récrite dans le contexte des topos élémentaires, voire des catégories avec appartenance ([1], n° IV), ou plus généralement encore dans le contexte des *monades involutives complémentées* (m.i.c.) détaillé en [2]. Nous voudrions ici indiquer brièvement comment ceci est possible (voir aussi [3] pour d'autres informations à ce propos).

1. Soit $\mathbb{K} = [(K^\circ, I), (S, \epsilon), \equiv]$ *une catégorie relationnelle* ([2], p. 35) et N *une négation sur* (K°, I) au sens faible de [2] p. 60; la sous-catégorie $fonc(\mathbb{K})$ de K° constituée des $\mathbb{K}$-fonctions ([2] définition I.3.2) se trouve équipée d'une m.i.c. ([2] p. 53), notée

$$((F, i, \psi), \nu) \cong ((P, i, V), I, N) = \mathbf{U}.$$

(On remarquera que toute m.i.c. telle que pour tout objet e le morphisme i_e soit le noyau de $i_{P(e)}$ et de $P(i_e)$ est ainsi associée à une catégorie relationnelle).

On définit dans $fon(\mathbb{K})$ les morphismes π_e et Λ_e en posant:

$$P(\nu_e) = F(i_{F(e)}).F^2(\nu_e).\psi_{F(e)},$$

$$\Lambda_e = \nu_e.V_e.P(\nu_e) \quad \text{et} \quad \pi_e = \nu_{F(e)}.\psi_e.\nu_e.$$

Alors, si $f, g : e' \rightrightarrows F(e)$ sont dans $fon(\mathbb{K})$, on définit:

$$f\alpha_1 g \iff (\exists b : e' \to F^2(e))(\Lambda_e.b = f \text{ et } V_e.b = g)$$

et

$$f\alpha_2 g \iff (\exists b : e' \to F^2(e'))(F(i_{e'}).b = i_{e'} \text{ et } V_{e'}.b = F(f).\pi_e.g).$$

Dans le cas de la m.i.c. canonique $\mathbf{U}_2 = ((2^{(-)}, i, \psi), \complement)$ sur *Ens* ces deux relations sont identiques à « $f \leqslant g$ ».

2. Si $\alpha = \alpha_1$ ou α_2, on appelle *α-fermeture de Moore sur e* la donnée d'un morphisme $\mu : F(e) \to F(e)$ tel que $m^2 = m$, que $F(e)\alpha\mu$ et que μ préserve α.

Pour toute α-fermeture de Moore μ sur $e \in fon(\mathbb{K})_0$ on pose

$$U^{\mu} = \Lambda_{F(e)} \cdot P(\pi_e \cdot \mu) \cdot \Lambda_{F(e)} \cdot P(F(\pi_e \cdot \mu) \cdot t_{F(e)}) .$$

Dans le cas de $\mathbb{U}_2$ sur *Ens* on retrouve ainsi la fermeture, notée $U^d(\mu)$ dans [1] p. 18, qui permettait d'étudier la catégorie des relations semi-continues inférieurement (s. c. i.) comme une catégorie de Kleisli.

Dans le cas général on définira une relation (i. e. un morphisme de K) s. c. i. de (e', μ') vers (e, μ) comme étant un morphisme $R : e' \to F(e)$ de $fon(\mathbb{K})$ continu de μ' vers U^{μ}, c'est-à-dire vérifiant

$$\mu' . F(R) . U^{\mu} = F(R) . U^{\mu} .$$

Ce procédé vaut par exemple si U est une m. i. c. sur *Ens* associée à un sup-monoïde abélien $\mathcal{O}$ (voir [2]). Ainsi si

$$\mathcal{O} = ([0, 1] , \leqslant , .) ,$$

on obtient la théorie des relations floues s. c. i. entre fermetures floues.

1. R. GUITART, Foncteurs sous-objets, et relations continues, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIII-1 (1972), p. 57 - 100.

2. ——— Monades involutives complémentées, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XVI-1 (1975), p. 17 - 102.

3. ——— *Involutive monads and Topologies*, Lecture at Oberwolfach in 1975.