SUR LA DECOMPOSITION DES CATEGORIES (*)

par René GUITART

__Abstract.__ In this note we explain how the calculus on fibrations yields a description of the decomposition of categories. Special cases are smash product of groups and glusing of trees. We show that the theory of decomposition of categories is algebraic over CAT/Cât and is coalgebraic over CAT. These facts are preserved by convenient localisations, and so the theory of lax decompositions is proved to be algebraic and coalgebraic.

__Résumé.__ Une greffe d'arbres ou un joint de graphes, une présentation d'un groupe comme produit semi-direct, une partition d'un ensemble, voilà trois exemples d'une unique notion, à savoir la donnée d'une décomposition d'une catégorie C en base et fibres sous la forme $C = \int_I f$ où $f : \int_I f \longrightarrow I$ est une cofibration (normale scindée avec scindage donné) sur I. On indique d'abord le rapport entre cette notion et un cas spécial de la construction de la tour d'Applegate et Tierney, ce qui entraîne un caractère algébrique des décompositions. Ensuite on montre comment ce caractère coalgébrique est conservé pour les décompositions à fibres de type donné par un $T: M \longrightarrow \mathrm{Cat}$. Enfin le caractère coalgébrique est montré pour les décompositions "lax" modulo un graphe cartésien dans CAT satisfaisant à une condition de taille naturelle.

1. UN EXEMPLE DE FACTORISATION MODULO UN COTRIPLE.- Soit C une catégorie, $\mathbb{T} = (T, u, m)$ un triple sur C, $\tilde{\mathbb{T}}$ le cotriple sur $C^{\mathbb{T}}$ associé à l'adjonction $F^{\mathbb{T}} \dashv U^{\mathbb{T}}$, et soit $\mathrm{Fac}\,\mathbb{T} = (C^{\mathbb{T}})_{\tilde{\mathbb{T}}}$ (voir (1)). Un objet de $\mathrm{Fac}\,\mathbb{T}$ sera appelé une $\mathbb{T}$-__factorisation__ et identifié à un triplet (X, K, D) où (X, K) est une $\mathbb{T}$-algèbre et où D vérifie $K.D = 1_X$, $D.K = m_X.T(D)$ et $T(D).D = T(u_X).D$. Si C est à noyau le foncteur de comparaison $V : C \longrightarrow (C^{\mathbb{T}})_{\tilde{\mathbb{T}}}$ est adjoint à gauche au foncteur associant à (X, K, D) le noyau $\ker(u_X, D)$, et le triple $\mathbb{T}_2$ sur C associé à cette adjonction est le premier pas dans la construction de l'approximation idempotente de $\mathbb{T}$. Si $\mathbb{V}$ est un cotriple sur C, une $\mathbb{V}^*$-factorisation sur C^* sera appelée une $\mathbb{V}$-__cofactorisation__.

(*) Polycopié à l'université PARIS VII, septembre 1976.

PROPOSITION 1. (Van den Bril). Si $\mathbb{V}$ est un cotriple sur C tel que la counité $u : V \longrightarrow 1_C$ soit cartésienne, alors un triplet (X, K, D) où $K : X \longrightarrow VX$ et $D : VX \longrightarrow X$ est une $\mathbb{V}$-cofactorisation si et seulement si, pour les produits fibrés résultant du caractère cartésien de u, on a une catégorie interne à C de la forme $(d_0, d_1, i, k) = (u_X, D, K, V(u_X))$.

Soit Cat et CAT les catégories des petites catégories et des catégories localement petites. La construction de Grothendieck associant à tout foncteur $h : I \longrightarrow Cat$ la cofibration $k_h : K(h) \longrightarrow I$ détermine un foncteur $K : CAT/Cat \longrightarrow CAT$ qui admet (voir ([2])) un adjoint à droite d associant à tout X le foncteur $d_X : \mathbb{D}X \longrightarrow Cat : p : A \longrightarrow X \longmapsto A$ ($\mathbb{D}X$ est la catégorie ayant pour objets les foncteurs $p : A \longrightarrow X$ où $A \in Cat_0$, et pour morphismes les couples $(F, f) : p \longrightarrow p'$ où $F : A \longrightarrow A'$ est un foncteur et $f : p \longrightarrow p'F$ une transformation naturelle).

Soit $\mathring{C}at$ la catégorie des petites catégories pointées et $\varphi : \mathring{C}at \longrightarrow Cat$ la fibration universelle $k_{Id_{Cat}}$. On appelle φ-décomposition ou simplement décomposition d'une catégorie X la donnée d'un quadruplet (φ, h, q, f) tel que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & \mathring{C}at \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ I & \xrightarrow[h]{} & Cat \end{array}$$

soit un produit fibré dans CAT.

PROPOSITION 2. Si $X \in CAT_0$ la donnée d'une φ-décomposition de X équivaut à la donnée d'un foncteur $s : X \longrightarrow Cat$ et d'une $(-)\times\varphi$-cofactorisation de s dans CAT/Cat.

PROPOSITION 3. La théorie des catégories munies d'une φ-décomposition est algébrique sur $CAT/\mathring{C}at$.

2. LES DECOMPOSITIONS A TYPE DE FIBRES DONNE. - On désigne par $\mathbb{D}^* = (D^*, b, \zeta)$ le cotriple sur CAT associé à l'adjonction $K \dashv d$. Alors pour tout X on a $D^*X = d_X^*\varphi$; le morphisme canonique de D^*X vers DX est noté a_X.

PROPOSITION 4. Une $\mathbb{D}^*$-coalgèbre en X, $\theta : X \longrightarrow D^*X$ s'identifie à la donnée d'une factorisation (φ, h, q, f) telle que pour tout $i \in I_0$ on ait $h(i) \neq \emptyset$.

Les détails seront publiés dans le §2 de ([3]). Par exemple si l'on commence avec θ on trouve I comme l'image du foncteur $a_X . \theta : X \longrightarrow DX$.

Si l'on admet que $\mathbb{D}^*$ joue dans CAT le rôle du cotriple $\mathbb{P}^*$ des parties pointées dans Ens, alors une coalgèbre de $\mathbb{D}^*$ i.e. une cofibration vue comme structure sur son espace total est l'analogue dans CAT d'une coalgèbre de $\mathbb{P}^*$ dans Ens i.e. une relation d'équivalence.

Soit $M \in CAT_0$, $T : M \longrightarrow Cat$ un foncteur, M' la sous-catégorie pleine de M ayant pour objets les $X \in M_0$ tels que $T(X) \neq \emptyset$, $T' : M' \longrightarrow Cat$ la restriction de T et $k_{T'}$ la cofibration associée. On désigne par T^* le produit fibré le long de T, de sorte que $T^*.d : CAT \longrightarrow CAT/M$ admet $K.\Sigma_T$ pour adjoint à gauche. Dans cette adjontion de bons choix de T ($\ulcorner A \urcorner\ 1 \to Cat$, $2 \rightarrowtail Cat$, etc...) montre que Ens est un topos élémentaire. Le choix pour T du foncteur d'oubli $(Cat)_D. \to Cat$ donne dans la proposition 8 ci-après la coalgébricité des décompositions du "second ordre".

Par exemple encore soit $T : Gr \rightarrowtail Cat$ l'insertion de la catégorie des groupes dans Cat, et soit Act la catégorie des actions de groupes sur des groupes. On note int: $Gr \to Act$ le foncteur associant à tout G son action sur lui-même par automorphismes intérieurs, et sp : $Act \longrightarrow Gr$ le foncteur qui associe à toute action son groupe produit semi-direct. L'adjonction $K\Sigma_T \dashv T^*d$ nous donne alors :

PROPOSITION 5. <u>On a sp $\dashv$ int, et une coalgèbre en G du cotriple associé sur Gr est une décomposition de G en un produit semi-direct</u> $G_1 \ltimes G_2$ <u>d'un sous-groupe G_1 agissant par automorphismes intérieurs sur un sous-groupe G_2.</u>

On désigne par $\mathbb{D}^\bullet_T = (D^\bullet_T, b^T, \delta^T)$ le cotriple sur CAT associé à l'adjonction $K\Sigma_T \dashv T^*d$; en examinant comment $\mathbb{D}^\bullet_T$ est une "localisation" de $\mathbb{D}^\bullet$ le long de T on peut démontrer :

PROPOSITION 6. <u>Une $\mathbb{D}^\bullet_T$-coalgèbre en X, $H : X \longrightarrow D^\bullet_T X$ s'identifie à la donnée d'un couple (G, θ) où $G : X \longrightarrow M$ est un foncteur, où $\theta : X \longrightarrow D^\bullet X$ est une $\mathbb{D}^\bullet$-coalgèbre, et où $T.G = d_X.a_X.\theta$</u> .

PROPOSITION 7. <u>Une $\mathbb{D}^\bullet_T$-coalgèbre en X s'identifie à la donnée d'une $k_{T'}$-décomposition de X, c'est-à-dire d'un produit fibré $(k_{T'}, h, q, f)$.</u>

PROPOSITION 8. <u>Pour tout foncteur $T : M \longrightarrow Cat$ la théorie des catégories munies d'une $k_{T'}$-décomposition est coalgébrique sur CAT.</u>

3. LES DÉCOMPOSITIONS "LAX".- Si C est une catégorie à limites projectives finies, si $G = (M \xleftarrow{d_0} W \xrightarrow{d_1} M) = (W, d_0, d_1)$ est un graphe interne à C et si $p : A \longrightarrow M$ est un morphisme de C, alors pour tout $h : I \longrightarrow M$ on pose

$$\lim (A \xrightarrow{p} M \xleftarrow{d_0} W \xrightarrow{d_1} M \xleftarrow{h} I) = p \underset{G}{\downarrow} h.$$

Une (p, G)-<u>décomposition</u> de $X \in C_0$ est un triplet (X, h, v) où $h : I_h \longrightarrow M$ est un morphisme de C et où $v : X \longrightarrow p \underset{G}{\downarrow} h$ est un isomorphisme. En particulier si $G = (M, Id_M, Id_M)$ on parlera simplement de p-décomposition.

. Un graphe interne à CAT sera dit <u>cartésien</u> si d_1 est une cofibration normale scindée avec scindage donnée et si $[d_1, d_0] : W \longrightarrow M \times M$ est cartésien de d_1 vers $proj_1 : M \times M \longrightarrow M$ (transversalité de d_0 à d_1); alors le foncteur $\Sigma_{d_1}.d_0^*$ transforme les cofibrations en cofibrations. Cette notion est un cas particulier d'une définition plus générale de Bouen.

Soit M une catégorie localement petite et $R : M \longrightarrow CAT/M$ un foncteur ; R est déterminé par un couple (R_0, r) d'un foncteur $R_0 : M \longrightarrow CAT$ et d'une transformation naturelle $r : R_0 \longrightarrow \ulcorner M \urcorner$. Si l'on pose $k_{R_0} = d_1 : W \longrightarrow M$, r permet de définir $d_0 : W \longrightarrow M$ de sorte que $(W, d_0, d_1) = [(R_0, r)]$ est un graphe interne à CAT.

PROPOSITION 9. En associant à tout R le graphe $[(R_0, r)]$ on détermine une bijection entre les foncteurs de M vers CAT/M et les graphes cartésiens d'objets des sommets M.

Compte tenu de la proposition 8 on observe que, en notant z le morphisme canonique de $p \downarrow_G M$ vers W, les (p, G)-décompositions sont les $(d_1 z)$-décompositions, on peut montrer que :

PROPOSITION 10. Soit dans CAT un foncteur $p : A \longrightarrow M$ et G un graphe sur M. Pour que la théorie des (p, G)-décompositions soit coalgébrique sur CAT il suffit que G soit le graphe cartésien $[(R_0, r)]$ associé à un foncteur $R : M \longrightarrow CAT/M$ et que pour tout $x \in M_0$ l'ensemble $\{(f, z)/f \in A,\ z \in R_0(x),\ r_x(z) = p(f)\}$ soit petit et non-vide.

(1) H. Applegate et M. Tierney, Iterated cotriples, L.N. 137, p57-99, Springer 1970.

(2) R. Guitart, Remarques sur les machines et les structures, Cahiers top.géo.diff. XV,2, p113-144, Paris 1974.

(3) R. Guitart et L. Van den Bril, Fibrations, diagrammes et décompositions, à paraître dans Cahiers top.géo.diff. XVIII,4, 1977.

Université Paris 7
Département de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2, place Jussieu
75005 Paris