CHANGEMENT DE LOGIQUE
DANS LES
UNIVERS ALGEBRIQUES (x)

par René GUITART

On démontre ici que dans un univers algébrique le calcul des exponentielles est possible (i.e. un u.a. est nécessairement une catégorie cartésienne <u>fermée</u>), et on utilise ensuite ce résultat pour montrer que dans un u.a. on peut changer la logique (i.e. modifier le foncteur partie abstrait P de l'univers) tout en conservant la même catégorie de base $\underline{C}$, pour construire un nouvel u.a.. Un exemple de cette construction est le passage de la théorie des ensembles à la théorie des ensembles flous.

I. CALCUL DES EXPONENTIELLES.

On suppose le lecteur familiarisé avec les univers algébriques (u.a.), et on emploiera les définitions et notations de

SDLUA : Structures dans les univers algébriques, Multigraphié U. Paris 7, avril 77.

On considère une <u>monade involutive cartésienne</u> ($\mathbb{P}$, I, $-\times-$, D) sur une catégorie $\underline{C}$, c'est-à-dire que ($\mathbb{P}$, I) est une monade involutive sur $\underline{C}$ et que D est une loi distributive locale de $-\times-$ sur ($\mathbb{P}$, I) au sens de SDLUA déf. I.2.3. On a donc des bijections naturelles

$$G_{X,Y} : \quad \mathrm{Kl}(\mathbb{P})(X, Y) \cong C(X\times Y, P1).$$

Soit $q_X =: q^{A,X}: A\times X \longrightarrow X$, $w_X =: \mathrm{assoc}_{A,A,X}: (A\times A)\times X \longrightarrow A\times(A\times X)$,

$j_X = I(L_{\mathbb{P}}(q_X))$, $g_X = L_{\mathbb{P}}(w_X.(\Delta_A\times 1_X))$, $h_X = g_X \circ j_X$ ($\circ$ = comp. dans Kl P).

On a donc $\quad h_X = X \xrightarrow{IL_{\mathbb{P}}(q_X)} A\times X \xrightarrow{L_{\mathbb{P}}(w_X.(\Delta_A\times 1_X))} A\times(A\times X),$

et on pose $\quad h_X^! = I(h_X)$.

Autrement dit $h_X = \bar{H}_X$ et $h_X^! = \bar{H}_X^!$, en posant

---

(x) Multigraphié à l'Université Paris 7, mai 1977.

$H_X = P(w_X.(\Delta_A \times 1_X)).F(q_X).a_X$ et $H'_X = P(q_X).F(w_X.(\Delta_A \times 1_X)).\ a_{A \times (A \times X)}$.

On a alors les bijections naturelles d'adjonctions

$$\begin{array}{c}
Y \xrightarrow{\ R\ } A \times X \\ \hline
A \times Y \xleftarrow{1_A \overline{\times} IR} A \times (A \times X) \xleftarrow{\ h_X\ } X \\ \hline
A \times Y \xrightarrow{I(1_A \overline{\times} IR)} A \times (A \times X) \xrightarrow{\ h'_X\ } X \\ \hline
A \times Y \xrightarrow{1_A \overline{\times} R} A \times (A \times X) \xrightarrow{\ h'_X\ } X
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
A \times Y \xrightarrow{\ S\ } X \\ \hline
X \xrightarrow{\ IS\ } A \times Y \\ \hline
Y \xrightarrow{\ h_Y\ } A \times (A \times Y) \xrightarrow{1_A \overline{\times} IIS} A \times X \\ \hline
Y \xrightarrow{\ h_Y\ } A \times (A \times Y) \xrightarrow{1_A \overline{\times} S} A \times X
\end{array}$$

En posant $\quad ev_{A,PX} = P(q_X).F(w_X.(\Delta_A \times 1_X)).D_{A,A \times X}.(a_A \times 1_{P(A \times X)})$

on a donc $\quad ev_{A,PX} = S_X.P(H'_X).D_{A,A \times X}.(a_A \times 1_{P(A \times X)})$

de sorte qu'en posant $\quad P(A \times X) = (PX)^A$

la première bijection naturelle s'écrit

$$Y \xrightarrow{\quad r \quad} (PX)^A \quad / \quad A \times Y \xrightarrow{1_A \times r} A \times (PX)^A \xrightarrow{\quad ev_{A,PX} \quad} PX.$$

Quand à la deuxième (la bijection inverse) elle nous donne :

$$\begin{array}{l}
A \times Y \xrightarrow{\quad s \quad} PX \\ \hline
Y \xrightarrow{\ H_Y\ } P(A \times (A \times Y)) \xrightarrow{P(a_A \times s)} P(PA \times PX) \xrightarrow{P(D_{A,X})} P^2(A \times X) \xrightarrow{\ S_{A \times X}\ } P(A \times X)
\end{array}$$

de sorte que pour un morphisme $f : PX' \longrightarrow PX$ arbitraire on obtient avec

$s = f.ev_{A,PX'}$, d'après la définition de l'exponentiation :

$$f^A = S_{A \times X}.P(D_{A,X}).P(1_{PA} \times f).P(a_A \times ev_{A,PX'}).H_{P(A \times X')}.$$

Pour la suite des calculs il nous faut noter les deux équations d'adjonction :

Ad 1 : $\quad 1_{P(A \times X')} = S_{A \times X'}.P(D_{A,X'}).P(a_A \times 1_{PX'}).P(1_A \times ev_{A,PX'}).H_{P(A \times X')}$

Ad 2 : $\quad a_{A \times X} = ev_{A,P(A \times X)}.(1_A \times H_X).$

Compte tenu de Ad 1 (dans le cas X' = PX), de LD 5 (cf.SDLUA), de ce que les morphismes de la forme F(k) sont S-compatibles, puis de LD 1, de ce que les morphismes de la forme P(k) sont S-compatibles, et enfin de LD 2 et de $S_{A \quad PX}.P(a_{A \quad PX}) = 1_{P(A \quad PX)}$, il vient le lemme ci-dessous, en tenant compte de ce que f^A est l'unique morphisme tel que $f.ev_{A,PX} = ev_{A,PX}.(1_A \times f^A)$,et du diagramme

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
P(A\times PX) \arrow[rr, "H_{P(A\times PX)}"] \arrow[dd, equal] \arrow[ddr, phantom, "=(\mathrm{Ad}\ 1)"] & & P(A\times P(A\times X)) \arrow[rr, "P(a_A\times ev_{A,P^2X})"] \arrow[d, phantom, "=(\mathrm{LD}\ 1)"] & & P(PA\times P^2X) \arrow[rr, "P(1_{PA}\times S_X)"] \arrow[dlll, "P(D_{A,PX})"'] \arrow[d, "P(P(a_A)\times 1_{PX})"] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "="] & & P(PA\times PX) \arrow[dd, "P(D_{A,X})"] \\
& P^2(A\times PX) \arrow[dl, "S_{A\times PX}"'] \arrow[dr, "P^2(a_A\times 1_{PX})"] & & & P(P^2A\times P^2X) \arrow[urr, "P(S_A\times S_X)"'] \arrow[dll, "P(D_{PA,PX})"'] \arrow[drr, phantom, "=(\mathrm{LD}\ 3)"] & & \\
P(A\times PX) \arrow[dr, "P(a_A\times 1_{PX})"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & P^2(PA\times PX) \arrow[rr, "P^2(D_{A,X})"'] \arrow[dl, "S_{PA\times PX}"] & & P^3(A\times X) \arrow[rr, "P(S_{A\times X})"] \arrow[d, "S_{P(A\times X)}"] \arrow[drr, phantom, "="] & & P^2(A\times X) \arrow[d, "S_{A\times X}"] \\
& P(PA\times PX) \arrow[rrr, "P(D_{A,X})"] & & & P^2(A\times X) \arrow[rr, "S_{A\times X}"] & & P(A\times X)
\end{tikzcd}
$$

__Lemme__ : Pour tout $f : X \longrightarrow X'$ et tout $A \in \underline{C}_o$ on a les formules

$$[F(f)]^A = F(1_A \times f)$$
$$[P(f)]^A = P(1_A \times f)$$
$$[a_{PX}]^A = P(1_A \times ev_{A,PX}).H_{P(A\times X)}$$
$$[S_X]^A = S_{A\times X}.P(D_{A,X}).P(a_A \times 1_{PX})$$

Comme d'habitude si $k : B \longrightarrow A \in \underline{C}$ on introduit $(PX)^k : PX^A \longrightarrow PX^B$ comme l'unique morphisme tel que

$$ev_{A,PX}.(k\times 1_{PX^A}) = ev_{B,PX}.(1_B \times (PX)^k).$$

Alors, en notant $i_A = P(q_A) : P1^A = P(1\times A) \longrightarrow PA$, on aura, pour tout k,

$$(P1)^k = i_B^{-1}.Fk.i_A$$

si, et seulement si on a, avec $ev_A = ev_{A,P1}.(A\times i_A)^{-1}$,

$$ev_A.(k\times 1_{PA}) = ev_B.(B\times Fk).$$

Anders Kock a montré comment construire les exponentielles dans un topos en prenant pour Y^X le produit fibré de $\bar{\bar{v}}_X$ et c_Y^X, où $1 \xrightarrow{\bar{\bar{v}}_X} \Omega^X \,/\, X \xrightarrow{vrai_X} \Omega$, en prenant $c_Y^X : \Omega^{X\times Y} \longrightarrow \Omega^X \,/\, \Omega^{X\times Y}\times X \xrightarrow{\lambda} \Omega^Y \xrightarrow{c_Y} \Omega$, avec $\Omega^Y \xrightarrow{c_Y} \Omega / Y \xrightarrow{\{-\}_Y} \Omega^Y$ et $\Omega^{X\times Y}\times X \xrightarrow{\lambda} \Omega^Y / \Omega^{X\times Y}\times(X\times Y) \xrightarrow{ev} \Omega$.

Autrement dit, Kook définit Y^X par

$$Y^X = \left\{ R \rightarrowtail X \times Y \ / \ \forall x \in X,\ \{ y \in Y \ / \ (x,y) \in R \} \text{ est un singleton.} \right\}.$$

Cette construction <u>n'est pas</u> utilisable ici car elle utilise le calcul des morphismes caractéristiques. Pour cette raison nous préférerons à la formule de Kock la formule

$$Y^X = \left\{ R \rightarrowtail X \times Y \ / \ \forall x \in X,\ \{R(x)\} = \{ \{y\} \ / \ y \in R(x) \} \right\} .$$

Dans un topos cela se démontre en observant que, pour tout Y, $\{-\}_Y$ est le noyau de $\{-\}_{PY}$ et de $\exists \{-\}_Y$, de sorte que en appliquant $(-)^X$ on obtient encore un noyau.

<u>Théorème</u> 1 : Soit (P, I, $-\times\cdot$, D) une monade involutive cartésienne sur une catégorie $\underline{C}$ à produits et à noyaux ; on suppose de plus que, pour tout $X \in \underline{C}_o$

$$X \xrightarrow{a_X} PX \underset{Pa_X}{\overset{a_{PX}}{\rightrightarrows}} P^2X \quad \text{est un noyau.}$$

Alors $\underline{C}$ est cartésienne fermée. Cette conclusion vaut donc pour les univers algébriques (où de plus on a donc une "transposition", une "représentation des couples",etc.).

Preuve : On définit X^A comme étant le noyau

$$X^A \xrightarrow{\ker} (PX)^A \underset{P(a_X)^A}{\overset{a_{PX}^A}{\rightrightarrows}} (P^2X)^A$$

les deux morphismes intervenant étant bien définis d'après le lemme plus haut, et les objets PX^A et P^2X^A étant bien des exponentiels - définis comme égaux à $P(A\times X)$ et $P(A\times PX)$ respectivement. Pour tout Z la donnée d'un $f : Z \to X^A$ équivaut à celle d'un $u : Z \longrightarrow PX^A$ tel que $Pa_X{}^A . u = a_{PX}{}^A . u$; sur l'unique $v : Z\ A \longrightarrow PX$ que détermine u $(v = ev.(u \times A))$ cela signifie $Pa_X . v = a_{PX} . v$, et ce v correspond donc a un et un seul $w : Z \times A \longrightarrow X$.

Grâce à ce théorème il vient ensuite <u>st</u> : $A^X \longrightarrow PA^{PX}$ <u>qui fait de la monade</u> P <u>une monade forte</u> (au sens de Kock) ; on le définit comme suit.

Etant donnés $B : Z \longrightarrow PX$ et $f : Z \longrightarrow A^X$, on définit l'<u>image interne</u> de B par f ainsi

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Z \xrightarrow{f} A^X}{Z \times X \xrightarrow{\tilde{f}} A}}{Z \times X \xrightarrow{[1_Z, f] = g} Z \times A}}{P(Z \times X) \xrightarrow{Pg} P(Z \times A)} \qquad\qquad \dfrac{Z \xrightarrow{B} PX}{1 \xrightarrow{\tilde{B}} P(Z \times X)}$$

$$\dfrac{1 \xrightarrow{\tilde{B}} P(Z \times X) \xrightarrow{Pg} P(Z \times A)}{Z \xrightarrow{f(B)} PA}$$

Etant donné $C : Z \longrightarrow PA$, on définit l'<u>image inverse interne</u> de C par f ainsi

$$\dfrac{1 \xrightarrow{C} P(Z \times A) \xrightarrow{Fg} P(Z \times X)}{Z \xrightarrow{f^{-1}(C)} PX}$$

Pour $Z = A^X \; PX$, $f = proj_1$, $B = proj_2$, on obtient le <u>morphisme "image"</u> :

$$\begin{array}{rl} im_{X,A} : & A^X \times PX \longrightarrow PA \\ & (f, B) \longmapsto f(B) \end{array}$$

et en transposant $im_{X,A}$ on obtient

$$\underline{st}_{X,A} : \quad A^X \longrightarrow PA^{PX}.$$

Ce <u>st</u> fait donc de $\mathbb{P}$ une monade forte, comme dit ci-avant ; en particulier si $\theta : PA \longrightarrow A$ est une $\mathbb{P}$-algèbre, on a

$$\dfrac{PX \times A^X \xrightarrow{im_{X,A}} PA \xrightarrow{\theta} A}{PX \xrightarrow{\xi_X} A^{A^X}}$$

et θ se représente par le morphisme de monades $\xi : \mathbb{P} \longrightarrow A^{A^{(-)}}$.

N.B. La condition de noyau du théorème 1 était déjà remarquée dans mon article "MIC : Monades involutives complémentées, CTGD XVI,1 " (in Prop.I.2.6 p.30,et p.35); <u>elle est satisfaite si</u> $F : \underline{C}^{op} \longrightarrow \underline{C}$ <u>est monadique</u> (ou,dans l'ancienne terminologie, triplable), car alors le (co)noyau en question est créé par le conoyau scindé

$$\begin{tikzcd} {} & P^2X \arrow[l, "Fa_{?}"'] & {} \arrow[l, shift right, "Fa_{PX}"'] \arrow[l, shift left, "PFa_X"] \\ \end{tikzcd}$$

(ψ_A, ψ_{PX})

II. CHANGEMENT DE LOGIQUE.

Nous allons maintenant généraliser le Théorème III.2.1 p.72 de MIC, ce qui nous fournira de nombreux exemples non plus seulement dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ mais, entre autres, dans tout topos.

Soit d'abord $(\underline{A}, e, k) = A$ un monoïde dans $\underline{C}$. On montre alors que

$$r_{-,A} : (\ )\times A \Longrightarrow P$$

définie par $r_{X,A} : PX\times A \longrightarrow P(X\times A)$, est une loi distributive.

La théorie générale des lois distributives nous dit alors que l'on a donc une monade composée $\mathbb{P} \otimes_r (\ )\times A$, qui s'écrit ici $(Q, u, M) = Q_A$, avec

- $Q(X) = P(A\times X) \quad (= PA^{X})$
- $u_X = X \xrightarrow{e_X} A\times X \xrightarrow{a_{A\times X}} P(A\times X)$
- $M_X = P(A\times P(A\times X)) \xrightarrow{P(d^A_{A\times X})} PP(A\times(A\times X)) \xrightarrow{P^2(k_X)} P^2(A\times X) \xrightarrow{S_{A\times X}} P(A\times X)$

où $d^A_{A\times X}$ est défini par $d^A_{X'} : A\times PX' \simeq PX'\times A \xrightarrow{r_{X',A}} P(X'\times A) \simeq P(A\times X')$.

Pour $A = 1$, on retrouve $Q_A = P$.

Dans tous les cas on a

$$\frac{\dfrac{Y \longrightarrow P(A\times X) = Q_A(X)}{A\times X \longrightarrow PY}}{X \longrightarrow (PY)^A = P(A\times Y) = Q_A(Y)}$$

de sorte que Q_A est involutive, en supposant A abélien.

Soit en plus $\theta : PA \longrightarrow A$ une $\mathbb{P}$-algèbre en A compatible avec k i.e. avec

$$\theta.P(k).D_{A,A} = k.(\theta\times\theta).$$

A cause de la loi distributive $r_{-,A}$, la monade $\mathbb{P}$ se relève en une monade $\widetilde{\mathbb{P}}$ sur la catégorie $\mathrm{Monoïde}(\underline{C})$ des monoïdes internes à $\underline{C}$.

Alors θ détermine une structure de $\widetilde{\mathbb{P}}$-algèbre sur $(\underline{A}, e, k)$, de sorte que dans la catégorie $\mathrm{Monoïde}(\underset{\sim}{C})$ on a le conoyau absolu

$$\widetilde{P}^2 A \overset{S_A}{\underset{P\theta}{\rightrightarrows}} \widetilde{P}A \xrightarrow{\ \theta\ } A$$

Il en résulte, pour tout $X \in \underset{\sim}{C}_o$, que l'on a le conoyau dans $\underset{\sim}{C}$

$$P^2 A^X \overset{S_A^{\,X}}{\underset{(P\theta)^X}{\rightrightarrows}} PA^X \xrightarrow{\ \theta^X\ } A^X$$

calculable, d'après le lemme du § I.

On remarque donc que, suivant le théorème 1, les Y^Z peuvent se calculer comme noyaux, tandis que la formule ci-dessus montre qu' l'on peut les obtenir comme conoyaux, dès lors que Y est équippé d'une structure de monoïde.

Notons $\Gamma_X : A^X \xrightarrow{s_A^{\,X}} PA^X \simeq P(A\times X)$, $m_X : P(A\times X) \simeq PA^X \xrightarrow{\ \theta^X\ } A^X$

$$\varepsilon_X : X \xrightarrow{u_X} P(A\times X) \xrightarrow{m_X} A^X$$

$$\mu_X : A^{(A^X)} \xrightarrow{\Gamma_A^{\,X}} P(A\times A^X) \xrightarrow{P(1_A\times\Gamma_X)} P(A\times P(A\times X)) \xrightarrow{M_X} P(A\times X) \xrightarrow{m_X} A^X$$

et, pour $f : X \longrightarrow Y$,

$$P_A(f) := m_Y . P(1_A\times f) . \Gamma_X .$$

On considère alors $\mathbb{P}_A = (P_A, \varepsilon, \mu)$.

Observation. Le lecteur de SDLUA rapprochera la définition donnée de $\mathbb{P}_A$ de celle de la monade associée à une monade virtuelle. La différence est qu'ici on ne voudra voudra pas que Γ soit naturelle, mais que m soit naturelle : en posant $\alpha_X = \Gamma_X . m_X$, cela se traduit par la condition

$$\alpha_Y . P_A f = \alpha_Y . P_A f \alpha_X .$$

On vérifie alors que P_A est un foncteur et ε naturelle.

En écrivant la naturalité de μ on aboutirait a des conditions "symétriques" de celle données pour les monades virtuelles. Nous ne développerons pas ici le calcul de ces monades co-virtuelles, car le calcul de $\mathbb{P}_A$ peut être mené beaucoup plus directement.

Avec la condition mise sur $(\underline{A}, e, k, \theta)$ plus haut on peut montrer que

$S_A^{(X)}$: $P(P(A)\times X) \longrightarrow P(A\times X)$ et $P(\theta)^{(X)}$: $P(P(A)\times X) \longrightarrow P(A\times X)$

sont des morphismes de monades (vérification laissée au lecteur).

D'après la propriété de conoyau vu plus haut, si on note $K f$ le morphisme tel que

$$m_Y . Q_A(f) = K(f).m_X$$

on a

$$(m_Y . Qf. \Gamma_X).m_X = (Kf.m_X.\Gamma_X).m_X = Kf.m_X$$

et donc

$$m_Y.Qf.\Gamma_X = Kf$$

ce qui prouve la naturalité de m vers P_A comme nous l'avons défini, et aussi le fait que P_A est un foncteur.

Après vérification de la naturalité de μ, des unitarités et de l'associativité on obtient que $\mathbb{P}_A$ est une monade. Ensuite on obtient aussitôt le

<u>Théorème</u> 2 : Soit $(\underline{A}, e, k, \hat{\theta})$ un objet de $\underline{C}$ muni d'une loi de monoïde k d'unité e et d'une structure de $\mathbb{P}$-algèbre θ compatible avec k.

Alors on a dans la catégorie Monads($\underline{C}$) des monades sur $\underline{C}$ un conoyau

$$\mathbb{Q}_{PA} \rightrightarrows \mathbb{Q}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$$

On détermine ainsi un "foncteur de comparaison"

$$\mathbb{P}_{\_} : \text{Monoïde}(\underline{C}) \xrightarrow{\widetilde{\mathbb{P}}} \text{Monade}(\underline{C})$$

De plus si $\underline{C}$ munie de $(P, I, \times, D)$ est en fait un univers algébrique, alors on peut construire sur $\underline{C}$ une nouvelle structure d'u.a. où $\mathbb{P}$ est remplacé par $\mathbb{P}_A$. (en supposant (A, k) abélien).

<u>Exemples</u>

1- Si A est un sup-monoïde abélien, on peut équipper <u>Ens</u> d'une structure d'u.a. avec , pour tout X, $PX = A^X$; en particulier pour $A = ([o, 1], . , \sup)$ on obtient une structure d'u.a. avec $PX = [o, 1]^X$, et cette structure d'u.a. contient toutes les informations du calcul des ensembles flous.

2- Si $\underline{C}$ est un topos élémentaire, et j une topologie de Grothendieck sur $\underline{C}$, alors l'objet Ω_j classifiant les j-fermés est en fait un sup-monoïde abélien interne à $\underline{C}$, et on a donc sur $\underline{C}$ une structure d'u.a. où $P = P_{\Omega_j}$, qui contient toutes les informations du calcul les j-faisceaux.

3- De même sur un topos $\underline{C}$, on a une structure d'u.a. où, pour tout X, $PX = P_{\Omega^Z}(X) =: (\Omega^Z)^X$, ceci pour n'importe quel $Z \in \underline{C}_o$.

<u>Remarque</u> 1.

Contrairement à ce que certains ont pu affirmer hâtivement, les exemples du type 1 ne sont pas contenus dans les exemples du type 2. En effet sinon la "logique floue" serait la logique d'un certain topos, et donc serait intuitionniste, et l'espace des valeurs de vérité serait une algèbre de Heyting ; en particulier la conjonction des propositions serait l'opérateur <u>inf</u> dans le treillis des valeurs de vérité. Or dans la logique floue, le treillis des valeurs de vérité est l'intervalle réel $[o, 1]$, et la conjonction y est définie par le produit " . " des réels, et non pas par leur <u>inf</u>.

Bien entendu cet argument n'exclut pas la possibilité de plonger <u>Ens</u> dans un topos $\underline{E}$ (par exemple Ens^{Ens}, $Ens^{(Ens^{Ens})}$, $Ens^{(Ens^{(Ens^{Ens})})}$, ..., Ens^{∞}) de sorte que $[o, 1]$ soit plongé dans l'objet Ω de ce topos et que le produit "." dans $[o, 1]$ devienne l'inf dans Ω. Mais une telle construction n'est pas encore sur le marché.

<u>Remarque</u> 2. Prenons $\underline{C}$ = Ens, et $P = P_L$, où L est un premier sup-monoïde abélien. Avec les notations et résultats de mon article

CRI : Calcul des relations inverses, CTGD XVIII,1 (1977)

et en particulier la prop. II.12 p.29 de cet article, on voit qu'une P_L-algèbre est équivalente à la donnée d'un L-module, de sorte qu'une donnée (A, k, θ) d'un monoïde (A, k) muni d'une structure compatible (A, θ) de P_L-algèbre, revient à la donnée d'une L-<u>algèbre</u> (cette fois au sens classique de la notion d'algèbre). On peut donc dire que <u>le principe de changement de logique est à un u.a. donné ce que la théorie des algèbres est à un corps.</u>

Remarque 3. Si l'on considère le "diagramme heuristique"

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\begin{array}{c}\text{ENSEMBLES}\\ \text{Ens + sa log. cano.}\end{array} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] & \begin{array}{c}\text{TOPOS}\\ \text{un topos (e.g. } \mathrm{Ens}^{\underline{C}}\text{)}\\ \text{+ sa logique cano.}\end{array} \arrow[d, squiggly] \\
\begin{array}{c}\text{ENSEMBLES FLOUS}\\ \text{Ens + une log. modifiée}\end{array} \arrow[r, squiggly] & ?
\end{tikzcd}$$

on peut être tenté de mettre à la place de " ? " la notion d' UNIVERS ALGEBRIQUE, puisque dans un u.a. on peut avoir rendu "non-standard" aussi bien la catégorie de base (comme dans le passage $\mathrm{Ens} \rightsquigarrow \mathrm{Ens}^{\underline{C}}$) que la logique (comme dans le passage ENS. $\rightsquigarrow$ ENS. FLOUS).

Remarque 4. Il m'a toujours paru utile de tenter d'unifier la philosophie "universaliste" des topos (Lawvere-Tierney) et la philosophie de la "combinatoire singulière" des u.a. (Guitart). Dans cette ligne la remarque 2 suggère l'équation

$$\frac{K \quad \text{Corps}}{A \quad K\text{-Algèbre}} = \frac{E \quad \text{Topos}}{F \quad E\text{-univers algébrique}}$$

<u>La notion de</u> E-u.a. <u>est à définir</u> de façon que les structures d'u.a. sur $\underline{C}$ soient des $\mathrm{Ens}^{\underline{C}}$-u.a. (en effet les ingrédients P, a, S, D, etc. d'une str. d'u.a. sur $\underline{C}$ produisent par extensions de Kan une monade $\hat{P}$, des transformations $\hat{D}$, etc, sur le topos $\mathrm{Ens}^{\underline{C}}$). On veut aussi les E-u.a. pour E un u.a., et ceci de façon à étendre la définition (à trouver aussi) du cas E topos, et de sorte que si $E_A = (E, P_A, \ldots)$ est obtenu par changement de logique à partir de $(E, P, \ldots)$ alors E_A soit un E-u.a.