Extensions De Kan Absolues (*)

René Guitart

Les notions de bi-produit, colimites absolues, adjonctions, foncteurs initiaux peuvent s'exprimer dans Cat en termes d'extensions de Kan absolue, i.e. de diagrammes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "I"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\varphi"] & Y \arrow[dl, "R"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

qui sont des extensions de Kan préservées par tout foncteur $H : \underline{Z} \to K$. Si $A \xrightarrow{U} Z$ et $B \xrightarrow{V} Y$ sont des foncteurs on note

$\varepsilon\,[U]: U{\downarrow}F \to U{\downarrow}R$ et $\varepsilon\,[V,V]: \mathrm{Id}_1{\downarrow}V \to U{\downarrow}RV$ les morphismes canoniques avec $d_1 : U{\downarrow}F \to X$. On considère aussi le morphisme de distributeur $\tilde{\varphi} : [I\cdot,-] \otimes [\cdot, F-] \to [\cdot, R-]$.

1. Les conditions suivantes sont équivalentes:
   - (a) : φ est une extension absolue.
   - (b) : φ est pointwise et se calcule par colimites absolues.
   - (c) : Pour tout z, $Z[z,-]\cdot\varphi$ est une extension pointwise,
   - (d) Yoneda $_Z \cdot \varphi$ est une extension
   - (e) $\tilde{\varphi}$ est un isomorphism de distributeur.

2. Les équivalences (a) $\longleftrightarrow$ (b) $\longleftrightarrow$ (c) $\longleftrightarrow$ (e) ont été montré par R. Harting dans le contexte des $\mathcal{V}$-catégories (Oberwolfach 1973). Cela s'étend au cas des 2-catégories munies d'une Yonda-structure au sens de Street-Walters comme suit:

2. Soit $\mathbb{K}$ une 2-catégorie telle que pour tout A il existe un $A \xrightarrow{Y_A} \hat{A}$ tel que pour tout $S : A \to B$ il existe $T : B \to \hat{A}$ tel que $S \overset{Y_A}{\dashv} T$ (T est un adjoint partiel de S le long de Y_A). Alors un diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\varphi"] & Y \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

est une extension absolue si et seulement si $Y_Z \cdot \varphi$ est une extension.

3. Afin de caractériser les extensions absolues dans des 2-catégories sans Yoneda-structure (e.g. catégorie d'homotopie...)

(*): Math. Forschungsinstitut Onerwolfach, Tagunsbericht Kategorien, august 1977.

on introduit la notion de foncteur opaque: un foncteur $P:A \to B$ est dit opaque si $\forall A, A' \in A, \forall \beta : PA \to PA'$ il existe un zig-zag $A, \diagup \diagdown \ldots \diagup \diagdown A'$ dans A dont l'image par P est liée à p par une lanterne

D'après le Zig-Zag theorem d'Isbell si $\underline{P}$ est opaque et surjectif sur les objets c'est un épimorphisme; mais un épimorphisme n'est pas nécessairement opaque. Pour les foncteurs bijectifs sur les objets les deux notions sont équivalentes. Si B_P est la sous-catégorie pleine de B ayant pour image les $P(A)$, $\underline{P}$ est opaque si et seulement si le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "\underline{P}"'] \arrow[r, phantom, "=", shift right=3ex] & B_P \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

est une extension de Kan absolue.

Les foncteurs riches sont opaques et en fait ce que fait Mac Donald lorsqu'il étend les théories cohomologiques le long de foncteurs riches peut se faire avec des foncteurs opaques. L'intérêt des foncteurs opaques est aussi que l'on peut faire avec eux ce que Diers fait sur les adjonctions partielles avec des foncteurs pleins denses:

Si $S \xrightarrow{I} T$ (φ) et si I est opaque dense, alors

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "I"'] & \arrow[d, phantom, "\varphi"] & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

est une extension pointwise.

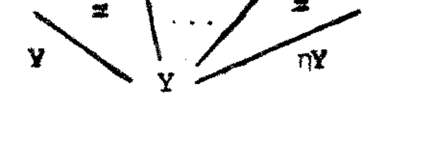
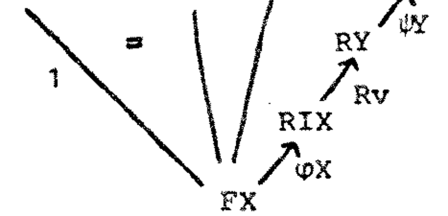
4. En utilisant $\underline{1}$ on voit que φ est absolue si on a l'"equation": $\tilde{\varphi}$ iso cela se développe en la condition explicite:

(f) : $\forall y \in Y \; \exists \, Ly \in X$, $Ry \xrightarrow{\psi_y} FLy$, $ILy \xrightarrow{\eta_y} y$ tels que

i) $1_{Ry} = R\eta_y \cdot \varphi Ly \cdot \psi y$

ii) Pour tout $IX \xrightarrow{v} y \in Y$ il existe un zig-zag $x \overset{t_o}{\diagup} x_1 \ldots \diagdown Ly$

tel que l'on ait des lanternes


et


On retrouve ainsi les résultats de Paré sur les limites **absolues**.

5. Lue Van den Bril a montré que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a), (b), (c), (d), (e), (f), (g): $\forall Z$, $\varepsilon\,[\ulcorner Z \urcorner] : Z{\downarrow}\Gamma \to Z{\downarrow}R$ est initial,

(h): $\forall U, V$, $\pi_0\,(\varepsilon\,[U,V])$ est un iso, (i): $\pi_0(\varepsilon[\,|Z| \to Z, |Y| \to Y])$ est un iso

(j): $\varepsilon[\,1_Z, 1_y]$: $Id_1{\downarrow}\, y \to Z{\downarrow}R$ présente $Z{\downarrow}R$ comme catégorie de fractions stricte de $Id_1{\downarrow}y$. par la sous-catégorie des morphismes "verticaux".

(k): $\varepsilon\,[1_Z, 1_y]$: $Id_1{\downarrow}y \to Z{\downarrow}R$ est opaque surjectif sur les objets,

c'est-à-dire ce que l'on appellera un <u>épimorphisme fort</u>.

6. Dans une 2-catégorie arbitraire $\mathcal{K}$ on appelle épimorphisme fort un $P : A \to B$ tel que
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "P"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[dl, equal] \\ B & \end{tikzcd}$$
soit une extension de Kan absolue.

Si la 2-catégorie $\mathcal{K}$ est représentable finiment complète l'équivalence (a) $\leftrightarrow$ (k) a un sens et est vraie. L'etude de toutes les extensions absolues dans $\mathcal{K}$ est donc ramenée à l'etude des épimorphismes forts.