C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 1572-1574 (15 juin 1970). Série A

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *La catégorie des relations continues entre fermetures.* Note (*) de M. **René Guitart**, présentée par M. René Garnier.

On définit la catégorie des relations continues entre fermetures de Moore, catégorie qui contient la catégorie des applications continues et la catégorie duale de la catégorie des applications ouvertes. La première de ces inclusions définit un foncteur adjoint. En application on définit une famille de foncteurs de la catégorie des applications ouvertes vers la catégorie des applications continues.

Les notations sont celles de [1].

1. Définitions. — Si μ est une fermeture sur un ensemble E [i. e. une application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ croissante, extensive et idempotente], on notera $m(\mu)$ l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$.

Étant donné une catégorie pleine d'application $\mathfrak{M}^0$ ayant pour classe d'objets un univers $\mathfrak{M}_0$, on considère la classe $\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})$ formée des triplets (ν, Φ, μ), où μ et ν sont des fermetures, où Φ est un élément de $m(\nu) \circ \mathfrak{J}_a(\mathfrak{M}) \circ m(\mu)$, et où l'on a

$$\mu \circ \bigstar(\Phi) \circ \nu = \bigstar(\Phi) \circ \nu.$$

Cette classe, munie de la composition $\circ$

$$(\nu', \Phi', \mu') \circ (\nu, \Phi, \mu) = (\nu', \Phi' \circ \Phi, \mu) \quad \text{si et seulement si } \mu' = \nu,$$

forme la catégorie des relations continues entre fermetures, catégorie que l'on notera $\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$.

Notons $\overline{\overline{\mathfrak{T}}}(\mathfrak{M})^0$ la sous-catégorie pleine de $\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ ayant pour objets les fermetures définies à partir de topologies.

Notons $\Sigma(\mathfrak{M})^0$ [resp. ${}^*\Sigma(\mathfrak{M})^0$] la sous-catégorie de $\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ formée des triplets (ν, Φ, μ), où Φ est de la forme $\mathfrak{P}(\varphi)$ [resp. $(\bigstar \circ \mathfrak{P})(\varphi)$]. Alors la catégorie $\mathfrak{T}^0$ (resp. $\mathfrak{T}'^{0*}$) des applications continues entre espaces topologiques [resp. duale de la catégorie des applications ouvertes entre espaces topologiques], s'identifie à $\overline{\overline{\mathfrak{T}}}(\mathfrak{M})^0 \cap \Sigma(\mathfrak{M})^0$ [resp. $\overline{\overline{\mathfrak{T}}}(\mathfrak{M})^0 \cap {}^*\Sigma(\mathfrak{M})^0$].

Enfin, on désigne par m le foncteur $(\mathfrak{J}_a(\mathfrak{M})^0, \underline{m}, \bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^0)$ défini par

$$m((\nu, \Phi, \mu)) = (m(\nu), \Phi, m(\mu)).$$

Il est aisé de vérifier que m a un adjoint et un coadjoint.

2. Proposition 1. — *La catégorie $\Sigma(\mathfrak{M})^0$ est à $\mathfrak{M}_0$-limites projectives et inductives; la catégorie ${}^*\Sigma(\mathfrak{M})^0$ est à $\mathfrak{M}_0$-limites projectives.*

La construction explicite des limites invoquées est faite dans [2].

Proposition 2. — *Le foncteur $(\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^0, \iota, {}^*\Sigma(\mathfrak{M})^0)$ a un adjoint et n'a pas de semi-coadjoint. Les foncteurs $(\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^0, \iota, \Sigma(\mathfrak{M})^0)$ et $(\Sigma(\mathfrak{M})^0, \iota, \mathfrak{T})^0$ ont des coadjoints et n'ont pas de semi-adjoints.*

Des propositions 1 et 2 on déduit :

Proposition 3. — *Soit* $(\mu_i)_{i\in I}$ *une famille d'unités de* $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ *avec* $I \in \mathfrak{M}_0$, *où chaque* μ_i *est une fermeture sur un ensemble* E_i.

(*a*) *Cette famille admet* $\sum_{i\in I}\mu_i$, *pour somme dans* $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$, *naturalisée par les* $\left(\sum_{i\in I}\mu_i, \mathfrak{P}(\sigma_i), \mu_i\right)$, *où* σ_i *est l'injection canonique de* E_i *dans* $\sum_{i\in I}E_i$ *et* $m\left(\sum_{i\in I}\mu_i\right) = \mathfrak{P}\left(\sum_{i\in I}E_i\right)$, *avec*

$$\forall X \subset m\left(\sum_{i\in I}\mu_i\right), \quad \left(\sum_{i\in I}\mu_i\right)(X) = \bigcup_{i\in I}\left(\mathfrak{P}(\sigma_i)\circ\mu_i\circ(\star\circ\mathfrak{P})(\sigma_i)\right)(X).$$

(*b*) *Cette famille admet* $\sum_{i\in I}\mu_i$ *pour produit dans* $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$, *naturalisé par les* $\left(\mu_i, (\star\circ\mathfrak{P})(\sigma_i), \sum_{i\in I}\mu_i\right)$.

Par contre, $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ n'est ni à noyaux ni à conoyaux, car $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})^0$ ne l'est pas.

De la proposition 2 on déduit aussi que le foncteur $(\overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})^0, i, \mathfrak{T}^0)$ admet un coadjoint $t = (\mathfrak{T}^0, \underline{t}, \overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})^0)$; donnons explicitement ce dernier : Si μ est la fermeture associée à une topologie sur un ensemble E, $t(\mu)$ est la topologie sur $\mathfrak{P}(E)$ dont la famille de fermés est engendrée par réunions finies et adjonction de l'ensemble vide à partir de la famille des $F \subset \mathfrak{P}(E)$ tels que

$$(\exists X \subset E)\ (\mu(X) = X \text{ et } F = \{Y \subset E / E - Y \subset X\}).$$

3. Une fermeture μ sera dite *quasi-compacte* si, pour toute famille $(X_i)_{i\in}$ d'éléments de $m(\mu)$ telle que $\bigcap_{i\in I}\mu(X_i) = \mu(\emptyset)$, il existe une sous-famille finies $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$ telle que $\bigcap_{j=1,\ldots,n}\mu(X_{i_j}) = \mu(\emptyset)$.

Proposition 4. — *Soit* (ν, Φ, μ) *une relation continue telle que* Φ *soit un épimorphisme de* $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M})^0$ (*i. e. surjective*) *et que* $(\star(\Phi)\circ\nu)(\emptyset) = \emptyset$. *Si* μ *est quasi-compacte, alors* ν *est quasi-compacte.*

Néanmoins une relation continue ne possède pas toutes les propriétés des applications continues : Par exemple, le graphe $J^{-1}(\Phi)$ d'une relation continue (ν, Φ, μ) entre espaces topologiques séparés n'est pas nécessairement fermé dans l'espace topologique produit des deux espaces considérés. C'est ce défaut qui suggère la proposition suivante :

Proposition 5. — *Soient* μ *et* ν *des fermetures sur les ensembles* E *et* F *respectivement. On définit une topologie* $\mathcal{O}(\nu, \mu)$ [resp. $\mathcal{F}(\nu, \mu)$] *sur* $F \times E$

en prenant pour ouverts les intersections finies de graphes de relations continues de μ *vers* ν *(resp. pour fermés les intersections quelconques de graphes de relations continues de* μ *vers* ν*). Si* μ *et* ν *sont définies à partir de topologies* T *et* T′, *alors* $\mathcal{O}(\nu, \mu)$ *est plus fine que la topologie produit* $\mathrm{T}' \times \mathrm{T}$, *et en général n'est pas discrète.*

De plus, on définit un foncteur $\mathcal{O}$ *de* ${}^{\star}\Sigma(\mathfrak{M})^{0\star} \times \Sigma(\mathfrak{M})^{0}$ *vers* $\mathfrak{T}^{0}$ *en posant*

$$\mathcal{O}((\nu', (\star \circ \mathfrak{P})(f), \nu), (\mu, \mathfrak{P}(g), \mu')) = (\mathcal{O}(\nu, \mu), f \times g, \mathcal{O}(\nu', \mu')).$$

COROLLAIRE. — *Tout espace topologique* (E, T), *dont la fermeture est* μ, *définit un foncteur* $\mathcal{O}(\mu, -)$ *de* $\mathfrak{T}^{0}$ *vers* $\mathfrak{T}^{0}$, *et un foncteur* $\mathcal{O}(-, \mu)$ *de* $\mathfrak{T}'^{0}$ *vers* $\mathfrak{T}^{0}$.

L'étude de ces foncteurs, ainsi que la définition de la catégorie $\bar{\Sigma}(\mathrm{C}^{\cdot})^{\bar{\cdot}}$ associée à une catégorie quelconque $\mathrm{C}^{\cdot}$, feront l'objet de prochains articles.

(*) Séance du 8 juin 1970.

(1) R. GUITART, *Comptes rendus*, 270, série A, 1970, p. 1398.

(2) R. GUITART, *Thèse de 3e cycle*, Faculté des Sciences de Paris, juin 1970.

(*Faculté des Sciences,*
33, *rue Saint-Leu,*
80-*Amiens, Somme.*)