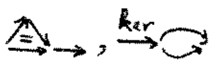
Séminaire de Catégories
Guitart-Lair-Coppey-Foltz
U.E.R. Maths, U. Paris 7

16 février 1979
exposé n° 9

FONCTEURS-TYPES, EQUATIONS DE STRUCTURES, UNIVERS ALGEBRIQUES.

par René GUITART.

§ 0. Remarque préalable. Il y a une sorte de limitation interne pour tout formalisme (cf. le théorème de Gödel) indiquant qu'une langue donnée ne peut discourir complètement sur elle-même, et une limitation externe indiquant que dans un "moule formel" donné ne peut se "réaliser" qu'une classe spécifique d'idées. Plutôt que de rechercher un langage universel où l'on puisse tout exprimer, il vaut mieux rechercher le formalisme naturel pour exprimer et résoudre un type donné de problèmes. Ainsi un langage non-naturel pour la continuité est le système d'expressions "$\forall \varepsilon \exists \eta \ldots$", l'emploi direct de symboles " $x_n \longrightarrow l$ " constituant un mode de pensée plus adapté. L'emploi sans complexes des infiniement petits constituerait aussi un progrès "linguistique" au sujet de la théorie de la continuité (cf. analyse non-standard, géométrie différentielle synthétique). Comme autre exemple, le langage "naïf" de la géométrie plane, qui est constituer d'expressions du type  ,etc, n'a jamais fait l'objet d'un traitement formel direct, non plus que le langage "naïf" des esquisses (constitué d'expressions du type  ,etc). Il y a là un manque, un manque de naturel. Par contre le langage usuel (sic) du 1er ordre écrit avec les symboles $\forall, \exists, \vee, \wedge, \neg, \longrightarrow$, a fait l'objet d'études très détaillées ; mais ce langage adapté aux problèmes ensemblistes est très analytique et peu naturel dans le cadre des problèmes "très" structurés.

Ici on va exposer un langage adapté à un type de problèmes : celui des schéma de construction d'échelon de Bourbaki (et Quine), et ses dérivés catégoriques (Ehresmann, Blanc, Guitart). Actuellement ce type de description à l'intérêt d'avoir un sens aussi bien dans Ens que dans un topos ou une logique floue (e.g. $([0, 1], \leqslant, \cdot)$), et d'être adapté aux problèmes de topologie générale. Mais l'étude des règles de déductions dans un tel système reste à bâtir.

§ 1. Structures à la Bourbaki. Dans Ens on dispose du foncteur parties P, du foncteur produit $(-)\times(\cdot)$, de $Id_{\underline{Ens}}$, et de foncteurs constants $\ulcorner A_i \urcorner$ où $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles auxiliaires en nombre fini n. On appelle foncteur-types les foncteurs obtenus à partir des précédents par empilements successifs. ex : $T(E) = E \times P(A \times P(E \times E))$. A noter qu'Ehresmann ("Catégorie des foncteurs types" 1960) formalise un peu plus. En particulier en admettant des produits infinis, des $\varinjlim$ "naturelles", il cherche à atteindre les "structures locales".

Soit T un foncteur-type et $S_R(E) \subset T(E)$ défini par $S_R(E) = \{ t \in T(E) \,/\, Rt \}$, où R est une formule du langage usuel. On dit que $s \in S_R(E)$ est une structure sur E de type T et d'axiome R.

Quine a une idée analogue (au niveau des langages) : celle des constructions formatives. Idées reprises dans sa thèse par Houdebine. Puis par Blanc (thèse 3° cycle).

§ 2. Constructions formatives et formules typifiées. Il s'agit de voir d'où vient la formule R permettant de définir le S_R de Bourbaki (ci-avant). On se place dans la théorie des ensembles Z F (ensemble dénombrable de variables, symboles $=$, $\in$) et on lui ajoute pour tout $i \in \mathbb{N}$ un symbole fonctionnel à 1 place noté p_i ; soit ZF_p cette nouvelle théorie. Et soit A une formule.

On dit que $(C_1, \ldots, C_n)$ est une construction formative de A si l'on a :

1° $C_n = A$, 2° pour tout $i \leq n$, C_i est ou bien une variable, ou bien un symbole fonctionnel de ZF_p, ou bien, avec $k, j < i$, de l'une des formes $C_j(C_k)$, $C_j = C_k$, $C_j \in C_k$, $C_j \wedge C_k$, $C_j \Rightarrow C_k$, $\neg C_j$, $\exists C_j(C_k)$, $\forall C_j(C_k)$.

Remarque : les C_i ne sont pas forcément des formules bien formées.

On appelle <u>formule typifiée</u> un triplet $(A, C\_, T)$ où A est une formule de ZF_p, $C\_ = (C_1, \dots, C_n)$ est une construction formative de A, T est une typification de $(A, C\_)$ i.e. la donnée pour tout t terme de ZF_p figurant dans les $C_1, \dots, C_n$ d'un foncteur-type T_t, avec les conditions de compatibilité :

- si $t = p_i t'$, il existe J, $i \in J$, avec $T_t = T_i$ et $T_{t'} = \prod_{j \in J} T_j$,
- si parmi les C_i on a la formule $t = t'$, alors $T_t = T_{t'}$,
- si parmi les C_i on a la formule $t \in t'$, alors $T_{t'} = PT_t$.

<u>Notation</u> : si l'on a une formule typifié $(A, C\_, T)$ on appelle type de cette formule le foncteur $T_A = \prod_{i=1, \dots, k} T_{x_i}$,

où les x_i sont les variables libres de A.

<u>Convention</u>. Désormais, pour alléger l'exposé, on se restreint aux foncteur-types à 1 variable i.e. aux foncteurs $\mathrm{Ens} \xrightarrow{\mathrm{diag}} \mathrm{Ens}^n \xrightarrow{T} \mathrm{Ens}$ où T est un foncteur-type au sens du § 1.

<u>Notation</u>. Si $(A, C\_, T)$ est une formule typifiée on pose

$$T_A(E) \supset S_A(E) = \{(u_1, \dots, u_k) \in T_A(E) \ / \ A^{bor}(u_1, \dots, u_k)\}$$

où A^{bor} est obtenue à partir de A en y remplaçant $\forall x(\ )$ et $\exists x(\ )$ par les quantifications bornées $\forall x \in T_x(E)\ (\ )$ et $\exists x \in T_x(E)\ (\ )$.

Un élément s de $S_A(E)$ est une structure sur E de type T_A et d'axiome A^{bor}.

§ 3. <u>Transformations "naturelles" structurales</u>. Il s'agit d'éliminer, dans la construction de $S_A(E)$, les formules A ou A^{bor}, en les remplaçant par l'usage de transformations naturelles bien choisies entre les foncteur-types.

On appelle transformation naturelle structurale (t.n.s.) toute transformation obtenue par composition, produit fini, extension direct aux parties, extension inverse aux parties, à partir des transformations naturelles suivantes :

(1) <u>projecteurs</u> $\bar{g}$: si I est un ensemble fini, J un ensemble, et $g : I \longrightarrow J$ injective, on définit $\bar{g} : \prod_{j \in J} T_j \longrightarrow \prod_{i \in I} T_i$ par $\bar{g}(x_j) = (\bar{x}_i)$, $\bar{x}_i = x_{g(i)}$

(2) <u>trans. nat. jouant le rôle de constantes</u> : si T et T' sont des fonc.types on définit $k_{T,T'}(E) : T'(E) \longrightarrow P(T(E)\times PT(E)) : x \longmapsto$ graphe de l'appartenance $\in_{T(E)}$.

(3) <u>opérateurs d'intersections et de complémentaire</u>

$$\mathrm{Int}_{n,T} : (PT)^n \longrightarrow PT \quad , \qquad \mathrm{Com}_T : PT \longrightarrow PT.$$

N.B. $\mathrm{Int}_{n,T}$ n'est pas naturelle, sauf sur les inversibles ; on peut aussi utiliser le foncteur partie contravariant. De même pour Com_T, et pour l'évaluation ci-après.

(4) <u>évaluation</u> : $\mathrm{eva}_T : T \longrightarrow P^2T : x \longmapsto \{ X \,/\, x \in X \}$.

<u>Equation de structure</u> : soit T_1 et T_2 deux foncteurs-types et $T_1 \xrightarrow{\tau} PT_2$ une transformation nat. struc.. Une τ-structure est un couple (E, O) avec E un ensemble et O un élément de $T_1(E)$ vérifiant : $\tau_E(O) = \emptyset$, soit

$$O \in \ker(\tau_E, \ulcorner\emptyset\urcorner) =: S_\tau(E).$$

En utilisant les constructions formatives (Cf. §2) il est prouvé dans la thèse de $3^{\text{ème}}$ cycle de George Blanc que :

<u>Théorème</u> :

Si (A, C_-, T) est une formule typifiée il existe une transformation naturelle structurale $\tau : T_A \longrightarrow PT'_A$ telle que $S_A = S_\tau$.

<u>Exemple</u>: le τ décrivant la structure "espace topologique" :

$TE = P^2E$, $PT'E = P(E\times P(E)^2 \times (P^2(E)\times P(E)))$, et τ définie par

$$\tau : O \longmapsto \left\{ (x,(U,V),(F,Z)) \,/\, \begin{array}{l} (x \notin \bigcup O) \text{ ou } (U \in O \text{ et } V \in O \text{ et } U\cap V \notin O) \\ \text{ou}(F \subset O \text{ et } \bigcup F = Z \text{ et } Z \notin O) \end{array} \right\}$$

Pour d'autres aspects de la "traduction équationnelle de notions ensemblistes", voir ma note C.R.A.S. série A, p.541-543, t.279, sept. 1974 . Voir aussi mes autres textes sur les systèmes typiques et monades virtuelles.

<u>Morale provisoire</u> : pour définir les structures dans une catégorie $\underline{C}$ le point de vue des foncteurs-types <u>et</u> équations de structures vise à éliminer l'usage d'un langage extérieur à $\underline{C}$, et à exacerber les propriétés de la "logique interne" à $\underline{C}$ - identifiée là à la catégorie des transformations nat. structurales. On comparera à l'attitude de l'amateur d'esquisse, identifiant la logique (et le

langage) d'une esquisse à son type. Le travail avec les équations de structures où dans un type d'esquisse sont deux occurences du principe suivant :
<u>on peut court-circuiter l'emploi de la logique classique du 1^{e}_{ord} et mettre à la place la théorie des limites dans les catégories.</u>

§ 4. <u>Univers algébriques</u>. On considère le problème suivant : étendre à des contextes différents de <u>Ens</u> (e.g. topos de Grothendieck, logiques réelles) non booléiens, ni même parfois heytingiens, la construction des S_A sous la forme S_τ. Par commodité pour cet exposé je vais tout de même m'exprimer ci-dessous dans <u>Ens</u>.

<u>Matériel Suffisant</u> :

(1) le foncteur parties contravariant $2^{(-)} = F$.

(2) ψ : pour chaque X, $\psi_X : FX \longrightarrow FFX : A \longmapsto \{A' \ / \ \exists x\ (x \in A \text{ et } x \in A')\}$

(3) π : pour chaque X, $\pi_X : FX \longrightarrow FFX : A \longmapsto \{A' \ / \ \forall x\ (x \in A' \Rightarrow x \in A)\}$

(4) La catégorie de base (ici <u>Ens</u>) est supposée cartésienne : on a donc les données $(-)\times(\,.\,)$ (le produit cartésien), p, q (les projections), et $\Delta_X : X \longrightarrow X \times X$ (la diagonale).

(5) 1 est un objet final et $0_X : 1 \to FX : x \longmapsto \emptyset$.

(6) description de Kuratowski des couples :

c : pour chaque X, $c_X : X \times X \longrightarrow FX : (x,y) \longmapsto \{x, y\}$.

+ des équations entre ces données, assurant par exemples certaines naturalités pour ψ, π, c, etc. On peut alors définir P, $S : P^2 \to P$, $a : \mathbb{1} \to P$, etc., et définir d'une manière analogue aux §§2 et 3 les trans. nat. struc.. Il est alors possible de prouver (Guitart) :

<u>Théorème</u> : Si (A, C_-, T) est une formule typifiée, il existe une transformation nat. struc. $\tau : T_A \longrightarrow PT'_A$, construite avec le matériel suffisant ci-dessus, telle que
$$S_A = S_\tau .$$

N.B. Le Matériel Suffisant ci-dessus a la forme $(F, \psi, \pi, c, \ldots)$ parce que l'on a en vue des applications aux relations continues ; et dans les articles de

Kuratowski, Choquet, Michael sur les relations continues et convergences, il est fait un usage abondant de ψ, π, c, en particulier.

Petits exemples élémentaires d'équations de structures :

- $X = \emptyset \longleftrightarrow \psi_{FX} = Pa_{FX}$

-f: $F^2X \longrightarrow F^2X$ $=\exists : 2 \longrightarrow 2 \longleftrightarrow X = \emptyset$ et $f = FPa_X . a_{F^2X}$.

-f: $X \longrightarrow Y$ injection $\longleftrightarrow Ff.Pf = 1_{FX}$

-f: $X \longrightarrow Y$ surjection $\longleftrightarrow Pf.Ff = 1_{FY}$

-r: $X \longrightarrow FX$ congruence $\longleftrightarrow r = Fr.a_{FX}.r$

-r: $X \longrightarrow FX$ ordre $\longleftrightarrow$ r injection et $r = Fr.\pi_X.r$

Autre exemple : filtres et ultrafiltres:

(a) On se donne une nouvelle flèche $\pi^c_X : FX \longrightarrow FFX$ destinée à jouer le rôle de $A \longmapsto \{A' \ / \ A' \subset A$ et card $A' < c\}$. π^c_X n'est pas, intuitivement, déductible des données précédentes. On suppose maintenant $c = \aleph_0$, et on pose $\bigcap^c_X = \bigcap_{FX}.P(\pi^c_X)$.

Avec aussi $\mathrm{Ind}_X = F(\pi_X).\psi_{FX} : F^2X \rightarrow F^2X : \mathbb{A} \longmapsto$ satu. de A par induction.

et $\mathrm{Eng}_X = \bigcap_{FX}.P(\psi_X) : F^2X \longrightarrow F^2X : \mathbb{A} \longmapsto \{A' / \forall A \in \mathbb{A}, \ A' \cap A \neq \emptyset\}$,

on voit qu'un filtre est un $\mathbb{F} \in F^2X$ tel que

$$\mathrm{Ind}_X \mathbb{F} = \mathbb{F} \quad \text{et} \quad \bigcap^c_X \mathbb{F} = \mathbb{F}.$$

Un ultrafiltre $\mathbb{U}$ est un $\mathbb{U} \in F^2X$ tel que

$$\mathrm{Eng}_X \mathbb{U} = \mathbb{U} \quad \text{et} \quad \bigcap^c_X \mathbb{U} = \mathbb{U}.$$

(b) En fait on peut se passer de l'introduction de π^c_X : il suffit d'utiliser $\bigcap^2_X$ à la place de $\bigcap^c_X$ avec $c = \aleph_0$; voici une description d'un moyen d'obtenir $\bigcap^2_X$: de π_X on obtient $J_X = F(t_X).F(\pi_{FX}).t_{FX}$, avec $t_X = \psi_X.a_X$, et $a_X = c_X.\Delta_X$.

Puis on pose $\wedge_X = J_X.c_{FX}$, $D_{X,Y} = \wedge_{X \times Y}.\left[F(p^{X,Y}) \times F(q^{X,Y})\right]$, et on prend

$$\bigcap^2_X = P\wedge_X . D_{FX,FX} . \Delta_{F^2X} : F^2X \longrightarrow F^2X.$$

Définition : On appelle univers algébrique une catégorie cartésienne à élément final muni d'un système $(F, \psi, \pi, 0, c)$ comme ci-dessus vérifiant des équations que nous ne préciserons pas dans cet exposé.

Les univers algébriques (u.a.) admettent une présentation catégorique plus élégante que celle du "Matériel Suffisant" ci-dessus :

<u>Théorème</u> : La donnée d'un u.a. sur une catégorie $\underline{C}$ équivaut à la donnée de

(a) Une monade $\mathbb{P} = (P, a, S)$ sur $\underline{C}$.

(b) Une involution $I : \text{Kleisli}(\mathbb{P})^{op} \longrightarrow \text{Kleisli}(\mathbb{P})$.

(c) Une transposition $T : \text{Kl}\,\mathbb{P}^{op} \longrightarrow \underline{C}$ i.e. un foncteur T tel que

$$\begin{tikzcd}
C^{op} \arrow[rr, "L^{op}_{\mathbb{P}}"] \arrow[d, "L^{op}_{\mathbb{P}}"'] & & \text{Kl}\,\mathbb{P}^{op} \arrow[dd, "T"] \\
\text{Kl}\,\mathbb{P}^{op} \arrow[dr, "I"'] & = & \\
& \text{Kl}\,\mathbb{P} \arrow[r, "U_{\mathbb{P}}"'] & \underline{C}
\end{tikzcd}$$

(d) $c : (-)\times(\,.\,) \longrightarrow P$ trans. nat. telle que D (défini à la page précédente) fasse de $\mathbb{P}$ une monade involutive cartésienne.

+ quelques équations "de naturalité", et la condition de noyau du théorème ci-après.

A l'application identique $1_{PX} : PX = PX$ correspond $PX \xrightarrow{\bar{I}_{PX} = \epsilon_X} X$ dans $\text{Kl}\,\mathbb{P}$ et on retrouve les données ψ, π, par $U_{\mathbb{P}}(\bar{I}_{PX}) = S_X$, $U_{\mathbb{P}}I(\bar{I}_{PX}) = \psi_X$, $T(\bar{I}_{PX}) = \pi_X$. Et alors $(F^2, t, Ft_F) = \Pi$ est une monade, et $\pi, \psi : \mathbb{P} \longrightarrow \Pi$ deux morphismes de monades.

<u>Théorème</u>(Exemple "générique" d'univers algébrique : principe de changement de logique): soit $(\underline{C}, \ldots)$ un univers alg., satisfaisant donc, par hypothèse, à la condition que, pour tout $X \in C_o$, le diagramme $X \xrightarrow{a_X} PX \overset{a_{PX}}{\underset{Pa_X}{\rightrightarrows}} P^2X$ est un noyau . Alors $\underline{C}$ est cartésienne fermée est une conséquence de cet axiome de noyau. Si (A,k,s) est un monoïde abélien (A,k) et une $\mathbb{P}$-algèbre (A, s) compatibles, alors $A^{(-)}$ (bien défini puisque C est cartésienne fermée) devient le nouveau P d'une autre structure d'u.a. sur la même catégorie $\underline{C}$.

Par suite les ensembles flous, les topos, les <u>topos flous</u>, sont des exemples d'u.a.

§ 5. <u>La catégorie des univers algébriques</u>. Concevons une théorie T comme constituée de deux parties $T = (T_L, T_A)$ où T_L est la "logique préalable à T" et où T_A est l' "algèbre de T", subordonnée à T_L. Une interprétation d'une théorie T dans une autre théorie T' doit alors être la donnée d'une **interprétation** $T_L \xrightarrow{I_L} T'_L$, avec, ensuite, subordonnée à I_L, une interprétation $T_A \xrightarrow{I_A} T'_A$. Très souvent T_L = la logique du 1er ordre classique, et I_L = Id, I_A **étant définie ensuite** en interprétant les symboles fonctions **grâce aux produits cartésiens, et les symboles** relations comme sous-trucs (donc avec le calcul classique-**i.e. venant de** T_L - au sujet des relations) . Dans ces cas là, la logique T_L **n'est pas précisée et** on ne décrit que T_A, bien que le calcul **des formules dans T utilise** T_A **<u>et</u>** T_L.

On pensera a un univers algébrique (C, $\times$, $\mathbb{P}$, c, ...) comme à une **théorie où la logique** préalable est précisée. **Les morphismes d'u.a. seront donc des réalisations** ou modèles (par exemple ModCano (C, $\times$, $\mathbb{P}$,c,...) =: $\mathrm{Hom}_{u.a.}((C, \times, \mathbb{P}, c, \ldots), (\mathrm{Ens}, \times, \mathcal{P}_2, \ldots)))$ soit des foncteur $H: \underline{C} \to \underline{C}'$ préservant $\times$, $\mathbb{P}$, c, ... On obtient ainsi une catégorie notée <u>UA</u> , dont les morphismes sont l'analogue des morphismes logiques entre topos. Je ne sais pas comment définir entre u.a. des morphismes qui soient les analogues des morphismes géométriques entre topos.

On peut dire que <u>UA</u> joue pour la présentation des structures par eq. de str. et fonc. types, le rôle joué par <u>ESQ</u> (cat. des esquisses) pour la présentation des structures par cone-limites et diagrammes commutatifs, ou encore le rôle joué par <u>TH</u> et <u>MON</u> pour les présentations à l'aide des théories et des monades (respectivement). Pour la présentation via les langages dans les catégories, une catégorie <u>LAN</u> des langages serait à préciser. Une étude comparative de <u>UA</u>, <u>ESQ</u>, <u>TH</u>, <u>MON</u>, et <u>LAN</u> est à faire, et devrait déboucher sur l'étude axiomatique des"catégories de théories" .
