

RESUME DE THESE

THESE DE DOCTORAT D'ETAT SOUTENUE PAR RENE GUITART LE 8/06/79 A AMIENS

2<sup>ème</sup> sujet : L'axiomatique de Brelot en théorie du potentiel.

Il s'agit d'un travail d'étude et de synthèse proposé par Gustave Choquet.

1<sup>er</sup> sujet : Logiques, relations et structures dans les catégories.  
(résumé des principaux résultats)

Il s'agit d'un travail de recherche en théorie des catégories, réalisé sous la direction d'Andrée et Charles Ehresmann, qui comporte 10 chapitres, dont l'idée essentielle est d'étudier axiomatiquement la notion d'univers, en développant dans une catégorie arbitraire un calcul de relations dont l'ingrédient de base soit la catégorie de Kleisli d'une monade (= construction standard). A posteriori cette entreprise apparaît principalement comme une "catégorisation" du point de vue de Bourbaki-Ehresmann sur les foncteurs types et les structures.

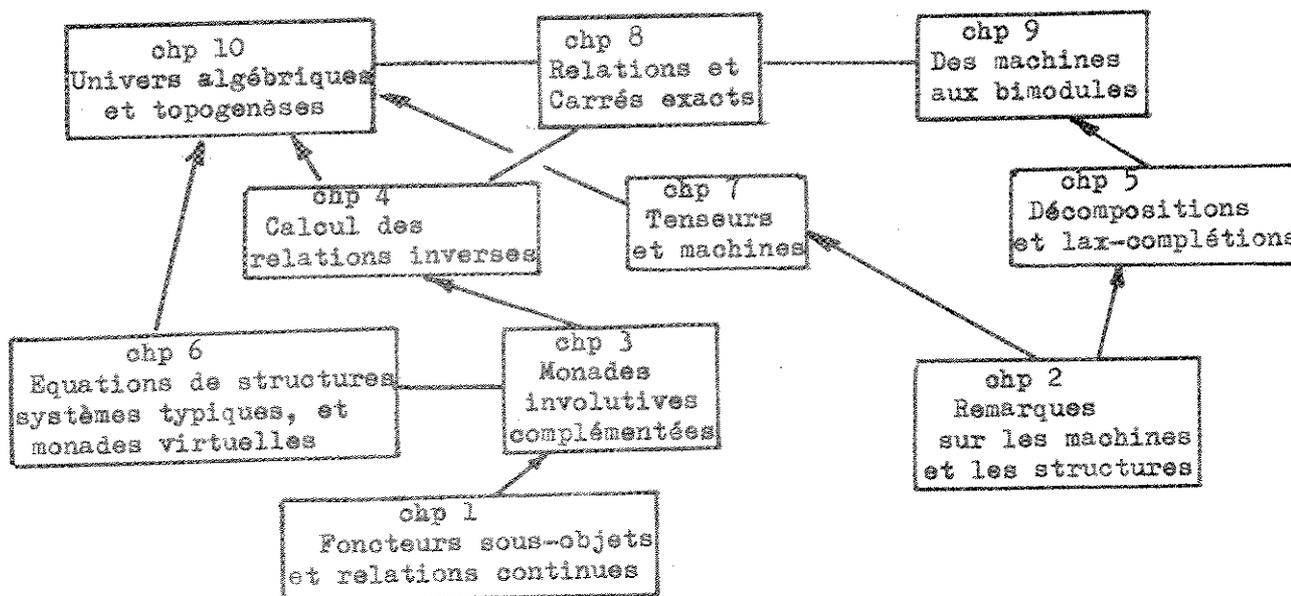
Résultats concernant Ens: le concept de pré-univers et d'univers algébrique (= catégorie de Kleisli + involution + transposition + lien) est dégagé, et on montre que dans ce cadre toutes les mathématiques du 1<sup>er</sup> ordre peuvent se faire ; cela fournit en particulier une unification de la théorie des ensembles flous et de la théorie des topos de Lawvere-Tierney (lesquels déjà amélioreraient les topos de Grothendieck). Au cours de l'élaboration des axiomes de pré-univers on introduit les monades monoïdales  $D : \otimes \longrightarrow \text{P}$ , et cela permet d'améliorer des résultats de Kock en précisant comment obtenir des produits tensoriels dans les catégories algébriques commutatives au-dessus d'une catégorie monoïdale fermée. Comme conséquence, on voit que les critères d'observabilité forte pour les automates non-déterministes, flous, stochastiques, etc, s'obtiennent automatiquement à partir des mêmes critères dans le cas déterministe.

Résultats concernant Top: le matériel des pré-univers est conçu pour pouvoir reproduire les travaux de Michael ou de Choquet sur les relations continues et les espaces de sous-espaces. Afin de traiter d'un seul coup la théorie des relations entre topologies, puis entre fermatures, puis entre quasi-topologies, etc, on introduit l'idée de topologie universelle ou topogénèse. Comme corollaire de l'étude dans ce cadre très général on obtient par exemple que dans le cas d'un topos il y a autant de manières naturelles de définir les relations continues qu'il y a d'ordres complets sur  $\Omega$ . L'étude des relations s.c.i. ou s.c.s. entre compacts est aussi amorcée dans cet esprit.

Résultats concernant Ab et Cat: en examinant la manière dont on compose les relations additives - d'une part, et les profoncteurs - d'autre part, on dégage le concept de carré exact dans une 2-catégorie arbitraire, et puis on montre que leur calcul dans le cas de Ab n'est autre que celui des suites exactes tandis que dans le cas de Cat il s'agit des extensions de Kan absolues, adjonctions partielles, carrés comma et co-comma.

Résultats concernant Cat: en plus des carrés exacts dans le cas de Cat, l'idée de relations que nous avons examinée dans Cat est celle de machine au sens de Mealy avec entrée et sortie des catégories. On démontre qu'elles sont classifiées par  $Cat//(-)$ , que pour tout X la catégorie  $Cat//X$  est la lax-complétion forte de X. Un critère d'extension de Kan avec paramètres -i.e. dans  $Cat//X$ , est établi. La catégorie des machines est plongée dans celle des 2-profoncteurs.

Situation des chapitres



Ajout de décembre 1980 :

Pour retrouver ces 10 chapitres au sein des deux volumes :

|                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| chp 1 ——— n°7, p 23 vol 1   | chp 2 ——— n°14, p 99 vol 1   |
| chp 3 ——— n°18, p 143 vol 1 | chp 4 ——— n°25, p 291 vol 2  |
| chp 5 ——— n°29, p 385 vol 2 | chp 6 ——— n°26, p 325 vol 2  |
| chp 7 ——— n°38, p 519 vol 2 | chp 8 ——— n°42, p 593 vol 2  |
| chp 9 ——— n°30, p 461 vol 2 | chp 10 ——— n°24, p 245 vol 1 |
|                             | n°27, p 371 vol 2            |

et pour une vue d'ensemble de ces travaux et de certains prolongements :  
voir "Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ?" n°44, p 619 vol 2