Diagrammes, Vol. 1, 1979.

THEORIE DES BORNES

par

René Guitart

Chapître 1 : Où l'on rencontre une présentation catégorique des cardinaux classiques.

Habituellement les cardinaux sont utilisés pour borner a priori des constructions et garantir l'existence d'objets qui risqueraient d'être "trop grands". Cela est fait d'abord en donnant un sens aux locutions :

"card A $\leqslant$ b" et "card A $<$ b".

Amplifiant cette remarque, voici une description de $\mathbb{N}$ (et de card) basée sur l'étude des sous-foncteurs du foncteur partie, ce qui est très différent de l'introduction d'un objet des entiers naturels. Cette démarche éclaire la manière dont l'arithmétique (finie ou transfinie) s'élabore à partir de la logique interne de Ens; cela s'adapterait aisément aux cas d'un topos, des ensembles flous, d'un univers algébrique.

Soit U un modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix (et donc aussi trichotomie sur les cardinaux). On désigne par Ens la catégorie de toutes les applications entre ensembles éléments de U, et par P: Ens $\longrightarrow$ Ens le foncteur "parties" covariant associant à tout ensemble X l'ensemble $PX = 2^X = \{A/\ A \subset X\}$ et à toute $f:X \longrightarrow Y$ l'application Pf: $PX \longrightarrow PY : A \longmapsto PfA = \{fa/\ a \in A\}$.

DEFINITIONS. On appelle borne un sous-foncteur B de P tel que pour tout X on ait $\emptyset \in BX$.

Sur la classe BOR de toutes les bornes on définit un ordre $\leqslant$ et deux lois binaires + et . par:

- $B_1 \leqslant B_2$ si et seulement si $\forall X\ (B_1X \subset B_2X)$,
- $(B_1 + B_2)(X) = \mathrm{Image}(B_1X \times B_2X \longrightarrow PX \times PX \longrightarrow PX)$,
- $(B_1 . B_2)(X) = \mathrm{Image}((B_1 \circ B_2)X \longrightarrow (P \circ P)X \longrightarrow PX)$, où $P \times P \longrightarrow P$ et $P \circ P \longrightarrow P$ désignent les transformations naturelles de "réunions".

On note $\underline{BOR}_{fin}$ la classe des bornes finies, i.e. vérifiant $B + B \neq B$.

THEOREME.

1) Toute borne $B \neq P$ est de la forme $P^{(b)}$ ou $P^{(b(}$, où b est un cardinal, avec

$$P^{(b)}X = \{A/\ A \subset X \text{ et card } A \leqslant b\},$$
$$P^{(b(}X = \{A/\ A \subset X \text{ et card } A < b\}.$$

2) $(\underline{BOR}, \leqslant, +, .) = \mathrm{BOR}$ est un semi-anneau bien ordonné et l'application $b \longmapsto P^{(b)}$ (resp. $b \longmapsto P^{(b(}$) détermine le semi-anneau bien ordonné $(\underline{CAR}, \leqslant, +, .) = \mathrm{CAR}$ des cardinaux de Ens (avec $\leqslant$, + et . usuels) comme un sous-semi-anneau de BOR.

3) On a $(\underline{BOR}_{fin}, \leqslant, +, .) \simeq (\mathbb{N}, \leqslant, +, .)$.

4) Pour tout ensemble X on a card $X = \inf \{B/\ A \in BX\}$.

Ainsi dans des contextes plus généraux que celui de Ens (e.g.topos, ensembles flous, univers algébriques) le calcul des cardinaux (finis ou non) pourra être déduit de celui des bornes.

PREUVE. Une fois établi le point (1), le reste suit aisément des propriétés usuelles des cardinaux. Pour prouver (1), posons pour tout ensemble X

$$b_X = \sup \{\text{card } A \ /\ A \subset X \text{ et } A \in BX\}.$$

1- Si $Z \subset X$ et card $Z < b_X$, alors $Z \in BX$: en effet, par hypothèse on a un $A \subset X$ tel que $A \in BX$, card $Z \leqslant$ card $A \leqslant b_X$, et alors il existe une surjection $s: A \longrightarrow Z$ et donc une application $f: X \rightarrow X$

telle que $f(A) = Z$; par naturalité il vient $Z \in BX$ (ceci du moins dans le cas où $Z \neq \emptyset$).

2- Pour un X donné on a soit $BX = P^{(b_X(}(X)$ soit $BX = P^{(b_X)}(X)$. En effet, si pour un $A \subset X$, avec card $A = b_X$, on a $A \in BX$, alors tout A', avec card $A' = b_X$ est tel que l'on ait une bijection $u: A \longrightarrow A'$ et puis une application $f: X \longrightarrow X$ telle que $f(A) = A'$, de sorte que $A' \in BX$; on conclut alors grâce à 1- .

3- On a évidemment $b_X \leqslant \text{card } X$ et aussi $b_X = b_{\text{card } X}$.

4- Pour tout X et tout Y, la relation $b_X \leqslant \text{card } Y$ entraîne $b_X \leqslant b_Y$: en effet, soit $A \subset X$, avec $A \in BX$, de sorte que card $A \leqslant$ card Y; il existe donc une injection $j: A \longrightarrow Y$ et puis une application $f: X \longrightarrow Y$ telle que $f(A) = j(A)$. Alors comme $f(A) \in BY$ on a card $A =$ card $f(A) \leqslant b_Y$.

5- Si card $X \leqslant$ card Y, alors $b_X \leqslant b_Y$: cela résulte de 3- et 4- .

6- Pour tout X on a $b_{b_X} = b_X$. En effet, on a $b_X \leqslant b_X$ et on conclut grâce à 3- et 4- .

7- Pour tout X et tout Y, la relation $b_X > \text{card } Y$ entraîne l'égalité $b_Y = \text{card } Y$. En effet, on a un $A \in BX$ tel que card $A \geqslant$ card Y, et donc une surjection $s: A \longrightarrow Y$ et une application $f: X \longrightarrow Y$ avec $f(A) = Y$; et puisque $f(A) \in BY$, on a $b_Y \geqslant \text{card } Y$.

8- Si la suite $(b_X)_{X \in U}$ est non bornée, alors pour tout X on a l'égalité $b_X = \text{card } X$ et $B = P$. En effet, pour tout X il existe un Y tel que card $X < b_Y$ et d'après 4- on obtient $b_X = \text{card } X$; pour conclure il suffit de montrer que $X \in BX$. A cet effet, avec $Z = 2^X$ et $A = \{\{x\} \,/\, x \in X\} \subset Z$, on a card A = card $X <$ card Z (d'après Cantor) et puisque $b_Z = \text{card } Z$ on a $A \in BZ$; alors en prenant $f: Z \to X$ une application telle que $f(A) = X$, il vient par naturalité $X \in BX$.

9- Supposons $(b_X)_{X \in U}$ bornée et posons $b = \sup_X b_X$; alors pour tout X on a $b_X = \inf(b, \text{card } X)$. En effet, puisque $b_X \leqslant b$, on a tout d'abord $b_X \leqslant b_b \leqslant b$ et donc $b_b = b$ (d'après 4-). Ensuite:

- si $b > \text{card } X$, avec 7- on trouve que $b_X = \text{card } X$, donc $\inf(b, \text{card } X) = b_X$,

- si $b = \text{card } X$, alors $b_b = b = \text{card } X$ et alors $b_X = b_{\text{card } X} = b_b = b$,

- si $b < \mathrm{card}\, X$, alors $b = b_b \leqslant b_{\mathrm{card}\, X} = b_X \leqslant b$, et la formule est bien établie dans tous les cas.

10- Pour achever la preuve, on distingue deux cas:

1er cas: $B(b) = P(b)$. Alors pour tout X, si on a un $A \subset X$ tel que card $A = b$, on a une bijection $h : b \longrightarrow A$ et une application $f : b \longrightarrow X$ telle que $f(b) = A$, et donc $A \in BX$, si bien que $BX = P^{(b)}X$.

2ème cas: $B(b) \neq P(b)$. Si l'on avait un X et un $A \subset X$, avec card $A = b$ et $A \in BX$, on aurait un isomorphisme $h : A \longrightarrow b$ et une application $f : X \longrightarrow b$ telle que $f(A) = b$, ce qui contredirait l'hypothèse.

(à suivre ...)