CONSTRUCTIONS DE PRODUITS TENSORIELS ET MACHINES NON – DETERMINISTES (1)'

René GUITART, U. Paris 7

1 – <u>Ehrig & al.</u>, dans leur livre "Universal theory of automatas" (Teubner, 1974) indiquent comment, partant d'une catégorie monoïdale fermée $(E, \otimes, \mathbf{1}, \cdots)$ à (E–M)-décompositions, on associe à toute machine de Mealy $A = (S \xleftarrow{d} J \otimes S \xrightarrow{s} O)$ un morphisme $\bar{A} : S \longrightarrow [J^+, O]$ (avec $J^+ = 1 + J + J \otimes J + \ldots$) (la "run-map") puis son (E–M)-image Behavior(A) $\rightarrowtail [J^+, O]$. Ils énoncent alors le critère :

$X \rightarrowtail [J^+, O]$ est de la forme X = Behavior(A) pour un certain A

ssi

il existe un $d : X \otimes J \longrightarrow X$ tel que

$$\begin{tikzcd} X \otimes J \arrow[r] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {[J^+, O]} \otimes J \arrow[d, "\text{left shift}"] \\ X \arrow[r] & {[J^+, O]} \end{tikzcd}$$

<u>Problème</u> : Que devient ce critère et les théorèmes d'observabilité et minimisation des machines déterministes quand on passe aux machines P-floues c'est-à-dire aux machines $A = (PS \xleftarrow{d} J \otimes S \xrightarrow{s} PO)$ où J, O, S sont toujours des objets de E mais où $P : E \longrightarrow E$ est un foncteur, "donnant du flou", comme par exemple $PX = 2^X$ ou $PX = [0,1]^X$ (dans le cas E = Ens) ?

<u>Principe</u> : Pour obtenir les résultats "non-déterministes" de Ehrig & al (2ème partie du livre) il suffira d'appliquer les résultats "déterministes" (1ère partie du livre) à la catégorie monoïdale $(E^P, \hat{\otimes})$ que l'on décrit plus loin (<u>in</u> Théorème).

<u>Exemple</u> : Si E est un topos de Grothendieck, alors la minimisation des machines non-déterministes (= $\Omega^{(-)}$-floues) dans E est possible (mais non unique).

---

(1) Conférence à Arnsberg, en octobre 1979, au Nordwestdeutsches Kategorienseminar: Une conférence un peu différente sur le même sujet a été faite en mai à Paris 7 et une brève annonce des résultats a eu lieu cet été à Oberwolfach. Le tout sera remanié et développé dans l'article "TENSEURS ET MACHINES" à paraître dans Cahiers Top. Géo. Diff. XXI,1 (1980), où l'on trouvera en plus des développement sur les "bicatégories graduées" et sur les "relations ternaires".

(1)' Publié dans : Fernuniversität Seminarberichte Nr 7 (1980) pp 25–30.

2 - E. Burroni, Manes, ont montré la nécessité dans l'étude du non-déterminisme d'avoir une structure de monade $\mathbb{P}$ sur le processus P "donnant du flou", et ils ont observé l'utilité des lois distributives $(2^X)^+ \to 2^{(X^+)}$ et $M \times 2^X \to 2^{M \times X}$.

Principe : Ces lois distributives résultent en réalité d'une donnée plus fondamentale, à savoir une "loi distributive" $D_{X,Y}: 2^X \times 2^Y \longrightarrow 2^{X \times Y}$, qui plus précisément fait de la monade "des parties" $2^{(-)}$ une monade monoïdale sur $(\mathrm{Ens}, \times)$

3 - Foltz & Lair (et voir aussi A. & C. Ehresmann, et aussi Day) observent qu'une structure monoïdale $\otimes$ sur Ens^s où s est une esquisse projective provient d'une co-structure double $C = (s^{op} \times s^{op} \xrightarrow{\mathrm{Yon} \times \mathrm{Yon}} \mathrm{Ens}^s \times \mathrm{Ens}^s \longrightarrow \mathrm{Ens}^s)$.

Principe : Si la description d'une théorie par une esquisse est remplacée par la description en terme de monade, on sait qu'alors c'est la catégorie de Kleisli $\mathrm{Kl}\,\mathbb{P}$ de la monade $\mathbb{P} = (P, a, S)$ en question qui joue le rôle d'esquisse (théorème de Linton); pour obtenir des produits tensoriels sur $E^{\mathbb{P}}$ (= catégorie des algèbres de P), soit des co-structures doubles "régulières", il faudra obtenir des bifoncteurs $\mathrm{Kl}\,\mathbb{P} \times \mathrm{Kl}\,\mathbb{P} \longrightarrow E^{\mathbb{P}}$, et pour cela certains bifoncteurs $\mathrm{Kl}\,\mathbb{P} \times \mathrm{Kl}\,\mathbb{P} \xrightarrow{\overline{\otimes}} \mathrm{Kl}\,\mathbb{P} \longrightarrow E^{\mathbb{P}}$ conviendront.

4 - Linton a montré que si $\mathbb{P}$ est une monade sur une catégorie E à $\varinjlim$ finies, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $E^{\mathbb{P}}$ est à $\varinjlim$ finies.
(2) $E^{\mathbb{P}}$ est à cokers.
(3) $E^{\mathbb{P}}$ est à cokers de paires $\mathrm{Libre}(X) \rightrightarrows \mathrm{Libre}(Y)$.

A cela on peut facilement ajouter les équivalents suivants :

(4) $E^{\mathbb{P}}$ est à push-outs.
(5) $U^{\mathbb{P}}: E^{\mathbb{P}} \longrightarrow E$ est à quasi-quotients.
(6) $U^{\mathbb{P}}: E^{\mathbb{P}} \longrightarrow E$ est à quasi-quotients par les flêches cokers.

De (6) résulte aussitôt que si $\mathbb{P}$ est une monade sur Ens, alors $\mathrm{Ens}^{\mathbb{P}}$ est cocomplète (le quasi-quotient $A \rightsquigarrow r$ de A par r sera $A / \bar{r}$, quotient de A par $\bar{r}$, la plus petite relation contenant r et compatible avec les opérations de $\mathbb{P}$).

Pour d'autre informations sur les colimites dans les catégories d'algèbres, on lira avec profit "Colimits of algebras revisited" in Bull. Austr. Math. Soc. 1977 vol 17, par Adamek.

5 - Bourbaki décrit le produit tensoriel de deux espaces vectoriels E et F comme un coker dans la catégorie des espaces vectoriels, à savoir par

$$E \otimes F \;=\; R^{(E\times F)}/\sim$$

avec

$$\sum_{\text{formelle}}^{j} \Big(\sum^{i} a_i x_i \,,\, b_j y_j\Big) \sim \sum_{\text{formelle}}^{i} \Big(a_i x_i, \sum^{j} b_j y_j\Big)$$

Pour construire les produits tensoriels de manière semblable pour les $\mathbb{P}$-algèbres il faut donc être assuré que $E^{\mathbb{P}}$ est à conoyaux (cf. le § précédent).

6 - Kelly, Foltz, Pumplün, puis Linton, Banaschewski-Nelson, ont montré comment le produit tensoriel peut se construire dans une catégorie K au-dessus de Ens comme un classifiant des "bi-morphismes" (analogues des applications bi-linéaires). Par exemple, Foltz construit de tels classifiants par "quasi-quotients".
Porst & Wischnewsky, ainsi que Greve, les construisent par "structures semi-finales" Utilisant le résultat de Kock que nous allons rappeler plus loin (§ 8), Porst et Wischnewsky montrent alors que si $\mathbb{P}$ est une théorie commutative sur Ens, alors $\mathrm{Ens}^{\mathbb{P}}$ est monoïdale fermée.

7 - Eilenberg & Kelly ont donc introduit les catégories monoïdales et monoïdales fermées dans leur article de La Jolla (1965) ; sur la littérature sur le sujet on trouvera une bibliographie abondante dans la thèse de Lindner.
Dans l'article d'Eilenberg & Kelly est décrite la 2-catégorie MON des catégories monoïdales et foncteurs monoïdaux. Une monade dans la 2-catégorie MON sera appelée une monade monoïdale ; explicitement, une monade monoïdale est la donnée de $(E, \otimes, \dots)$ catégorie monoïdale et de $(\mathbb{P}, D)$ où $\mathbb{P} = (P, a, S)$ est une monade sur E et où D est la donnée de morphismes $D_{X,Y}\colon PX \otimes PY \longrightarrow P(X\otimes Y)$, pour tous les X, Y objets de E, de façon que les D "commutent" avec les a, les S, et les

isomorphismes d'unitarité et d'associativité de la structure monoïdale $\otimes$ sur E.

Si l'on convient de noter $\bar{r} : X \longrightarrow\!\!\!\!\!+\ Y$ le morphisme de Kl $\mathbb{P}$ que détermine le morphisme $r : X \longrightarrow PY$ de E, étant donné D on peut définir $\bar{\otimes}$ sur Kl $\mathbb{P}$ par

$$\bar{r} \mathbin{\bar{\otimes}} \bar{r}' = \overline{D_{Y,Y'}\cdot(r\otimes r')},$$

et inversement, étant donné $\bar{\otimes}$, on retrouve D par

$$\overline{D_{X,Y}} = \overline{1_{PX}} \mathbin{\bar{\otimes}} \overline{1_{PY}} .$$

Les conditions sur D se traduisent alors exactement par le fait que (Kl $\mathbb{P}$, $\bar{\otimes}$, ...) est une catégorie monoïdale telle que le foncteur " $\mathbb{P}$-algèbre libre" $L : E \longrightarrow$ Kl $\mathbb{P}$ soit un foncteur monoïdal strict.

On peut encore constater que D est totalement déterminée par ses composantes

$$r_{X,Y} = D_{X,Y}\cdot(1_{PX}\otimes a_Y) : PX \otimes Y \longrightarrow P(X\otimes Y)$$

et $$1_{X,Y} = D_{X,Y}\cdot(a_X \otimes 1_{PY}) : X \otimes PY \longrightarrow P(X\otimes Y),$$

et que l'on a la"formule de commutation" :

$$(+) \qquad S_{X\otimes X'}\cdot P(1_{X,X'})\cdot r_{X,PX'} = S_{X\otimes X'}\cdot P(r_{X,X'})\cdot 1_{PX,X'}.$$

<u>En pratique</u> pour construire D on construit r, 1, et on vérifie la formule $(+)$.

8 - <u>Kock</u>, dans cinq articles(entre 1970 et 1972), a étudié divers aspects des monades enrichies dans une catégorie monoïdale fermée symétrique $\mathbb{V} = (V, \otimes, [-,-], \cdots)$ ou $\mathbb{V}$-monades. Une $\mathbb{V}$-monade sur V (= "strong monad") est donc une monade $\mathbb{P}$, plus la donnée, pour X, Y objets de V, de morphismes "strengh" $st_{X,Y}: [X, Y] \longrightarrow [PX, PY]$ avec des conditions de cohérence. Par adjonction, à partir de st, on obtient les transformations r et 1 ; Kock montre que l'on a la "formule de commutation" $(+)$ - et donc un D faisant de $\mathbb{P}$ une monade monoïdale symétrique - si et seulement si la théorie $\mathbb{P}$ est commutative; et alors, si V est à noyaux, $V^{\mathbb{P}}$ est fermée.

Comme nous le disions plus haut, dans le cas V = Ens, Porst & Wischnewsky obtiennent que $\mathrm{Ens}^{\mathbb{P}}$ est monoïdale fermée, avec pour produit tensoriel le "semi-final tensor product" (Il faut noter que dans le cas de V = Ens toute monade est forte !).

<u>Keigher</u>, dans les hypothèses de Kock, ajoute que si P est "adjointe" - c'est-à-

dire en réalité (d'après Dunge) de la forme $M \otimes (-)$ – alors $V^{\mathbb{P}}$ est monoïdale fermée si V est à cokers (le hom interne étant celui donné par Kock, correspondant au calcul des opérations "point par point" dans l'algèbre d'arrivée).

Dans le cas d'une théorie commutative sur Ens, on dispose donc d'un D canonique ; on peut constater que, si (A,a), (B,b) et (C,c) sont trois P-algèbres, un bi-morphisme de $(A \times B\ ;\ a,\ b)$ vers (C,c) est précisément un $h : A \times B \longrightarrow C$ tel que

$$c.P(h).D_{A,B} = h.(a \times b).$$

Etant donné une monade monoïdale $(\mathbb{P}, D)$ on définira les D-bi-morphismes entre P-algèbres de la même façon.

9 – Nous sommes maintenant prêts à indiquer nos résultats :

THEOREME.

1°) Pour toute monade monoïdale $(\mathbb{P}, D)$ sur une catégorie monoïdale $(E, \otimes, \ldots)$ et tout $\otimes$-monoïde M on a une loi distributive (au sens d'Applegate-Beck) de la monade $(-) \otimes M$ sur la monade $\mathbb{P}$.

2°) De plus P se relève aux $\otimes$-monoïdes, et si de plus E est à sommes dénombrables on a une loi distributive (conjecturée par Kock) de la monade "monoïde libre" $(-)^+$ sur la monade $\mathbb{P}$.

3°) Si $E^{\mathbb{P}}$ est à cokers (par exemple si E est à cokers et $U^{\mathbb{P}}: E^{\mathbb{P}} \longrightarrow E$ à quasi-quotients), alors il existe $\hat{\otimes}$ sur $E^{\mathbb{P}}$ classifiant les D-bi-morphismes, donné par un coker simple dans $E^{\mathbb{P}}$:

$$L(PA)\ \overline{\otimes}\ L(PB) \underset{s_A \overline{\otimes} Lb}{\overset{La \overline{\otimes} s_B}{\rightrightarrows}} LA\,\overline{\otimes}\,LB \xrightarrow{\quad coker \quad} (A,a)\ \hat{\otimes}\ (B,b),$$

et à partir de là on peut décrire $(A,a)\ \hat{\otimes}\ (B,b)$ comme un quasi-quotient de $L(A \otimes B)$.

4°) La donnée de D ou de l'extension correspondante $\overline{\otimes}$ de $\otimes$ à $Kl\ \mathbb{P}$ équivaut encore à la donnée d'un relèvement $\tilde{\mathbb{P}}$ de $\mathbb{P}$ à $E^{\otimes}$ (catégorie des "algèbres" de $\otimes$, i.e. des $(A, B, C,\ h : A \otimes B \rightarrow C)$). Les $\tilde{\mathbb{P}}$-algèbres sont alors les D-bi-morphismes et on a

$$(E^{\otimes})^{\tilde{\mathbb{P}}} = (E^{\mathbb{P}})^{\hat{\otimes}}.$$

5°) Si de plus ($\mathbb{P}$, D) est <u>cohérente</u>, c'est-à-dire si pour tout X objet de E le foncteur $(-)\hat{\otimes} LX$ préserve $\mathrm{coker}(La \,\bar{\otimes}\, 1_{LB}, s_A \bar{\otimes}\, 1_{LB})$ et $\mathrm{coker}(1_{(A,a)} \hat{\otimes} Lb, 1_{(A,a)} \hat{\otimes} s_B)$ et le foncteur $LX \hat{\otimes} (-)$ préserve deux cokers analogues, alors $(E^{\mathbb{P}}, \hat{\otimes})$ est monoïdale et $U^{\mathbb{P}} : (E^{\mathbb{P}}, \hat{\otimes}) \longrightarrow (E, \otimes)$ est factorisation monoïdale finale de ($\mathbb{P}$, D).

6°) En particulier si (E, $\otimes$, ...) est monoïdale symétrique fermée à noyaux, si ($\mathbb{P}$, D) est une monade monoïdale symétrique (ce qui, suivant Kock, équivaut à dire que ($\mathbb{P}$, D) est une monade forte commutative),et si aussi $E^{\mathbb{P}}$ est à cokers, alors, $\hat{\otimes}$ étant adjoint à Hom, ($\mathbb{P}$, D) est cohérente, si bien que, $E^{\mathbb{P}}$ étant fermée suivant Kock, on a : $(E^{\mathbb{P}}, \hat{\otimes})$ est monoïdale symétrique fermée.

7°) Si, en plus des hypothèses du 6°), E est à sommes dénombrables, à images régulières, et si $\mathbb{P}$ est régulière, alors $(E^{\mathbb{P}}, \hat{\otimes})$ est monoïdale fermée symétrique à sommes dénombrables, à images régulières, à cokers et noyaux. Par suite les résultats de Ehrig & al. s'appliquent à $(E^{\mathbb{P}}, \hat{\otimes})$.

N.B. La bibliographie paraîtra avec l'article "TENSEURS ET MACHINES".