POUR UN CALCUL LOGIQUE GEOMETRIQUE

(ancien projet à commenter)

R. Guitart

I. <u>Avertissement</u> (janvier 1980).

Il m'a paru utile de diffuser les idées ci-après car, curieusement, elles semblent encore originales et à développer. Mon souci ce faisant est simplement de rendre disponible des éléments de travail, ce qui est parfois intéressant même si les idées ne sont pas accompagnées de beaux théorèmes "justifiant" l'imagination de l'auteur. Néanmoins je ne me serais pas risqué à peiner les esprits rigoureux en livrant un projet n'ayant pas encore atteint le stade d'une formulation cohérente simple (le lecteur attentif verra que figurent quelques "confusions" i.e. que des idées distinctes sont inopportunément représentées par un même objet formel) si je n'avait maintenant la conviction de pouvoir rendre claire et propre cette question. Je le ferais très prochainement, car je dispose de l'idée qui manquait il y a dix ans à savoir celle de <u>pro-foncteur de variables</u> <u>Var</u> : <u>Arités</u> $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\;\;$ <u>Sortes</u>. Il est clair maintenant que l'idée de champ logique élémentaire (c.l.é.) se décrirait plus agréablement dans le langage des catégories bifibrées, multicatégories, catégories de diagrammes, etc. L'important était la mise en place d'une idée de logique comme "<u>dualité</u>" propositions/valeurs, la conception <u>mixte</u> d'une théorie (T, M) à l'aide d'une "axiomatique" T <u>et</u> d'une "sémantique" M, et l'idée de <u>voir les cônes projectifs de</u> <u>P</u> <u>comme des déductions</u>. A noter aussi je crois - bien que ma conception de la logique soit maintenant assez différente - les observations du début sur la mathématisation des théories philosophiques et sur la logique à inventer pour la "pensée-en-forme-de-dessin".

Donc j'ai donné à Amiens en mai 1969 une série de cinq séances d'initiation à la logique. Les quatre premières séances avaient été polycopiées et diffusées sous le titre "Calcul propositionnel élémentaire" (Amiens 1969, 50 p.), et la dernière - qui est le texte du § II ci-dessous - avait été diffusée à part sous le titre "Pour un calcul logique géométrique" (Amiens 1969, 6 p.). On peut encore obtenir le texte des quatre premières séances en m'écrivant. J'espère avoir un jour le temps de remanier l'ensemble de ces séances en faisant jouer leur rôle directeur et simplificateur aux techniques de la théorie des catégories qui interviennent effectivement partout dans ces questions.

La séance IV était d'après "Introduction to mathematical logic" de E.MENDELSON, les séances II et III étaient adaptées de notes que j'avais prises aux cours fait à Paris en 1967-68 par D.LACOMBE et par J.P.CALAIS, et seule la séance I, très empirique, offrait un matériel nouveau formalisé naïvement dans la séance V. Voici le contenu des cinq séances :

I - Evaluations et combinaisons des propositions.

II - Le vrai et le faux (connecteurs, négation & implication, égalité & équivalence logique, jeux d'écriture, constantes, lois usuelles, formes normales)

III - Systèmes complétifs de fonctions (territoires, écritures, lectures, parenthésages, superpositoires).

IV - Axiomatique (théories formelles, théorie axiomatique du calcul propositionnel, théorème de déduction d'Herbrand).

- Interprétation du calcul L (l'interprétation usuelle et le théorème de complétude, autres interprétations et indépendances des axiomes de L).

V - Pour un calcul logique géométrique (champs logiques élémentaires, théories caractéristiques et complétude).

II. **Texte** (mai 1969).

0. Cette dernière conférence ne comporte pas de théorème, elle est purement descriptive et propose simplement un programme.

1. Le but de l'activité mathématique est d'extraire de l'Univers Réel de plus en plus de raisonnable. En particulier l'opinion que la Physique seule est <u>la</u> justification du travail mathématique est une opinion fausse, et en fait toutes les questions métaphysiques et théories philosophiques substantielles (et non pas seulement la Physique) devraient aussi faire l'objet d'études mathématiques.

2. Un fragment très minime de la "logique des philosophes" a été pris en compte dans la logique mathématique actuelle : chez Boole seuls les <u>connecteurs</u> propositionnels sont pris en considération, les <u>modalités</u> d'Aristote ne seront intégrées au calcul que par Lukasiewicz, et les <u>quantificateurs</u> par Tarski-Jònsson, Halmos, etc.

3. Mais en fait beaucoup reste à intégrer. En ce moment toute la logique mathématique traite de <u>mots</u> (et est donc "algébrique"), existe en fait comme sous-branche d'une linguistique générale qui tend à régler les lois de la "pensée-en-forme-de-discours". Effectivement la "pensée-en-forme-de-dessins" n'est pas du tout analysée, et il n'y a pas de logique mathématique de la vision géométrique.

4. L'idée d'implication et l'idée de conséquence sont foncièrement attachées à l'intuition de l'écoulement du temps réel ; l'exemple primitif de conséquence est celui d'événement historique conséquence d'un autre. En ce sens on peut dire que la logique prend sa source dans la prise de conscience du développement historique, et vise à saisir le discours sur le monde qui s'écoule. C'est une théorie du Verbe.

5. La géométrie se définie à partir d'un autre besoin, celui d'appréhension raisonnable instantanée de l'Espace Physique où existe <u>la nature</u>. C'est une théorie de la Chair.

6. Le Verbe peut-il se faire Chair (sic)? Logique et Géométrie se ramènent-elles l'une à l'autre ? Temps Historique et Espace Physique procèdent-ils l'un de l'autre ?

L'approche rationnelle de cette question consiste à rechercher une expression mathematique (i.e. Logique + Géométrique) du passage de la géométrie à la logique ou inversement de la logique à la géométrie.

7. Il s'agit d'expliciter sur le plan mathématique comment les concepts géométriques se développent à partir de la Logique :

c'est ce qui serait réalisé par l'axiomatisation de la Géométrie si l'Axiomatique ne reposait partiellement sur une conception "absolutiste" et libertaire, c'est-à-dire non historiquement relative, de la raison.

8. Par contre, et ceci n'est pas du tout réalisé, il faut aussi expliciter la Logique à partir des notions et intuitions géométriques ; pour ce faire il faut commencer par réamalgamer d'un point de vue géométrique les deux pôles de la Logique que sont Syntaxe et Sémantique.

Je vais indiquer maintenant une possibilité à ce sujet, donnant une forme mathématique précise aux idées contenues en fait dans la première conférence.

9. J'appellerai, provisoirement, Champ Logique Elémentaire la donnée

$$L = (\underline{P}, \underline{E}, /-/, O_-, (\hat{-}), A, (\bar{-}), R, \S)$$

où :

a) $\underline{P}$ est une catégorie dont les objets sont appelés propositions.
S'il existe un morphisme $f : P \longrightarrow P'$ de $\underline{P}$ on dira que P est restreint de P' par f, et si pour tout E de $\underline{E}_o$ (cf. b)) il existe un morphisme $r : P/E \longrightarrow Q/E$ (cf. h)) on dira que Q se réduit de P.

b) $\underline{E}$ est une catégorie dont les objets sont appelés échelles de valeurs de vérités ou simplement échelles.

c) $/-/$ est un foncteur $:-/: \underline{P}^{op} \longrightarrow \underline{E}$ tel que sa restriction aux objets soit une surjection associant à chaque proposition P l'échelle $/P/$ "où P peut prendre ses valeurs".

d) Pour toute échelle E, O_E est un objet initial dans $\underline{P}_E$ la sous-catégorie pleine de $\underline{P}$ ayant pour objets les P tels que $/P/ = E$.

e) Pour toute échelle E, $\hat{E}$ est semi-final dans $\underline{P}_E$.

f) $A : \underline{E} \longrightarrow On$ est une application "arité" de $\underline{E}$ dans une collection d'ordinaux, avec $A(1_E) = 1$ pour tout E.

g) $(\bar{-})$ est une application associant à tout $f : E \longrightarrow E'$ de $\underline{E}$ une application $\bar{f} : (/-/^{-1}(E))^{A(f)} \longrightarrow /-/^{-1}(E')$, qui est l'effet de f comme "combinateur" de propositions.

h) R est une fonction $R : \underline{E}_o \times \underline{P}_o \longrightarrow \underline{P}$ avec $/\mathrm{dom}\ R(E, P)/ = E$ et codom $R(E, P) = P$, associant à E et P la proposition $R(E, P)$ "restriction de P à E" ou "P, du point de vue seulement des valeurs de E". On suppose que, pour tout P, $R(/P/,P) = P$. On notera P/E pour dom $R(E, P)$.

i) Un ordre § sur $\underline{E}_o$ tel que

- pour tout f de $\underline{E}$, codom f § dom f,
- E' § E entraîne $R(E', P) = R(E', \mathrm{dom}\ R(E, P)).R(E, P)$, pour tout P,
- E' § E entraîne $R(E, \hat{E'}) = \hat{E}$.

10. On reconnaîtra de a) à i) la juxtaposition naïve d'une série d'intuitions de la première conférence, qui s'opposent et se contrarient, si bien que cette mise en forme ou modèle est encore "contradictoire".

Se pose donc le problème de simplifier ce modèle, pour le rendre mathématiquement viable et utilisable ; il faudra décider ce qui doit être important et ce qui doit être secondaire. Je ne m'en occuperai pas ici.

11. Soit donc L un c.l.é.

Une L-théorie sera un couple (T, M) avec $T \subset \underline{P}$ et $M \subset \underline{E}$.

De plus on dira que :

1. Q de $\underline{P}_o$ est projectivement déduit de $T \subset \underline{P}$ s'il existe une partie de T dont Q soit limite projective dans $\underline{P}$.
2. E de $\underline{E}_o$ est inductivement décrite de $M \subset \underline{P}$ s'il existe une partie de M dont E soit limite inductive dans $\underline{E}$.
3. Q de $\underline{P}_o$ est (T,M,o)-constructible, avec $T \subset \underline{P}$, $M \subset \underline{E}$, si $Q = P/E$ pour un P de T_o et un E de E_o.

. Q est (T,M)-constructible s'il existe un ordinal b tel que Q soit (T,M,b)-constructible i.e. tel qu'il existe E de M_o et g de M avec dom g $= E$, $A(g) = a \leq b$, et une famille $(P_i)_{i \in a}$ d'éléments de

$(/-/^{-1}(E))_o$ où chaque P_i est (T,M,c_i)-constructible avec $c_i < b$ pour tout i de a, ceci avec $Q = \bar{g}((P_i)_{i \in a})$.

12. Une L-théorie (T',M') est dite <u>caractéristique</u> de $T \subset \underline{P}$ ssi les propositions projectivement déduites de T sont exactement les propositions (T',M')-constructibles. Ensuite, on voit donc comment dans ce cadre "catégorique" des c.l.é. se formule <u>le problème de la complétude</u>.