C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 635-638 (5 octobre 1970). Série A

TOPOLOGIE. — *Définitions de l'homotopie entre relations.*
Note ([*]) de M. René Guitart, présentée par M. René Garnier.

Après avoir donné quelques compléments sur les catégories de relations continues on introduit une domination et des convergences compactes, ce qui permet de définir les notions d'homotopies entre relations et entre relations continues.

Cette Note fait suite à ([2]) et ([3]) et en reprend les notations ([4]).

1. Catégories de relations continues. — Signalons que la continuité d'un triplet (ν, Φ, μ) au sens de ([3]) équivaut à la condition

$$K'(\mu) \circ d(\Phi) \circ K'(\nu) = d(\Phi) \circ K'(\nu),$$

i. e. ce que certains appellent la semi-continuité inférieure (s. c. i.) lorsque μ et ν sont associées à des topologies ([5]). Il est alors clair que $\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{0*}$ est isomorphe à la catégorie des relations ouvertes entre fermetures, laquelle sera désignée par $\mathfrak{R}\mathfrak{O}(\mathfrak{M})^0$.

On notera $\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ la catégorie des relations semi-continues supérieurement au sens fort (s. c. s. f.) entre fermetures sur-jacente à la catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}^0$, c'est-à-dire la classe des triplets (ν, Φ, μ), où μ et ν sont des fermetures, où Φ est un élément de $m(\nu) \circ \mathfrak{I}_a(\mathfrak{M}) \circ m(\mu)$, et où l'on a

$$\mu \circ d(\Phi) \circ \nu = d(\Phi) \circ \nu,$$

munie de la composition $\circ$ évidente. La catégorie $\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{0*}$ est isomorphe à la catégorie $\mathfrak{R}\mathfrak{F}(\mathfrak{M})^0$ des relations fermées entre fermetures. On notera $_*\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ la sous-catégorie de $\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ formée des triplets $(\nu, \underline{\Phi}, \mu)$, où Φ est de la forme $(\star \circ \mathfrak{P})$ (φ).

On vérifie aisément que $_*\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ n'est pas à produits finis. Le foncteur $(\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0, \iota, \Sigma(\mathfrak{M})^0)$ a un coadjoint; il s'ensuit que $\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ est à $\mathfrak{M}_0$-sommes, les sommes (et leurs naturalisations) dans $\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$ étant les mêmes que dans $\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$. La catégorie $\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^0 \cap \underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^0$, notée $\mathfrak{R}\mathfrak{C}(\mathfrak{M})^0$, est donc à $\mathfrak{M}_0$-sommes, tandis que la catégorie $\mathfrak{R}\mathfrak{O}\mathfrak{F}(\mathfrak{M})^0$ des relations ouvertes et fermées entre fermetures, duale de cette dernière, est à $\mathfrak{M}_0$-produits.

De la proposition 2 de ([3]) et des affirmations ci-dessus découle [en notant $\mathfrak{R}\mathfrak{C}\mathfrak{T}(\mathfrak{M})^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{R}\mathfrak{C}(\mathfrak{M})^0$ ayant pour objets les fermetures associées à des topologies] :

Proposition 1. — *Les foncteurs injections canoniques* $(\mathfrak{R}\mathfrak{C}(\mathfrak{M})^0, \iota, \Sigma(\mathfrak{M})^0)$, $(\mathfrak{R}\mathfrak{C}\mathfrak{T}(\mathfrak{M})^0, \iota, \Sigma(\mathfrak{M})^0)$ *et* $(\mathfrak{R}\mathfrak{C}\mathfrak{T}(\mathfrak{M})^0, \iota, \mathfrak{T}^0)$ *ont des coadjoints.*

Précisons seulement que la structure $(\mathfrak{UCT}(\mathfrak{M})^\circ, \iota, \mathfrak{T}^\circ)$-colibre sur un espace topologique (E, μ) est la topologie la moins fine sur $\mathfrak{P}(E)$ telle que, pour tout X ouvert (resp. fermé) de (E, μ), l'ensemble $\{Y \subset E / E - Y \subset X\}$ soit ouvert (resp. fermé); cette topologie est homéomorphe à la « finite topology » de Michael définie dans ([6]).

Notations. — $\mathfrak{C}^\circ$ désignera l'une des catégories $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ$, $\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ$, $\mathfrak{UC}(\mathfrak{M})^\circ$, $\mathfrak{UCT}(\mathfrak{M})^\circ$, et, μ étant une fermeture, $2_{\mathfrak{C}^\circ}(\mu)$ sera une $(\mathfrak{C}^\circ, \iota, \Sigma(\mathfrak{M})^\circ)$-structure colibre sur μ. On notera $\tau(\mu)$ une $(\Sigma(\mathfrak{M})^\circ, \iota, \mathfrak{T}^\circ)$-structure colibre sur μ.

2. Domination. — Soient A, B, A′, B′, A″, B″ des ensembles, R une relation de A′ vers A, R′ une relation de B′ vers B, U une relation de A vers B, R_1 une relation de A″ vers A′, et R'_1 une relation de B″ vers B′. On définit la relation $R' \times R$ de $B' \times A'$ vers $B \times A$ par :

$$(\forall x' \in A')\ (\forall y' \in B')\ ((R' \times R)\ (\{(y', x')\}) = R'(\{y'\}) \times R(\{x'\})).$$

On a alors les formules

$$(R' \circ R'_1) \times (R \circ R_1) = (R' \times R) \circ (R'_1 \times R_1) \qquad \text{et} \qquad (d(R' \times R))\ (U) = (d(R')) \circ U \circ R,$$

de sorte que l'on définit bien un foncteur Ω de $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\circ *} \times \overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ$ vers $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ$ en prenant pour $\Omega((F, \nu), (E, \mu))$ la fermeture sur $F \times E$ dont les ouverts sont les relations s. c. i. de (E, μ) vers (F, ν), et en posant, pour R s. c. i. de μ vers ν et R′ ouverte de μ' vers ν' :

$$\Omega((\nu', R', \mu'), (\nu, R, \mu)) = (\Omega(\nu', \nu), R' \times R, \Omega(\mu', \mu)).$$

Désignons par $\Omega_\bullet$ la restriction de Ω à ${}^*\Sigma(\mathfrak{M})^{\circ *} \times \Sigma(\mathfrak{M})^\circ$; son image est dans $\Sigma(\mathfrak{M})^\circ$.

On définit le foncteur ω de $\mathfrak{UO}(\mathfrak{M})^\circ$ vers $\mathfrak{M}^\circ$ en prenant pour $\omega(\mu)$ l'ensemble des ouverts de la fermeture μ et, (ν, R, μ) étant un élément de $\mathfrak{UO}(\mathfrak{M})^\circ$, pour $\omega((\nu, R, \mu))$ l'application de $\omega(\mu)$ dans $\omega(\nu)$ induite par R.

Proposition 2. — *Le foncteur Ω^* dual de Ω définit une domination de $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ$ par le foncteur ω, et, pour toute fermeture μ, les foncteurs $(\Sigma(\mathfrak{M})^\circ, \Omega_\bullet(-, \mu)\ {}^*\Sigma(\mathfrak{M})^{\circ *})$ et $(\Sigma(\mathfrak{M})^\circ, \Omega_\bullet(\mu, -), \Sigma(\mathfrak{M})^\circ)$ ont des coadjoints.*

De cette proposition on déduit [ce que l'on pourrait établir directement en utilisant le fait que le produit d'ensembles $E \times G$ est un produit tensoriel dans $\mathfrak{J}_a(\mathfrak{M})^\circ$] l'existence d'une $\left(\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ, \iota \circ \Omega_\bullet(\mu, -), \Sigma(\mathfrak{M})^\circ\right)$-structure colibre $p'(\nu, \mu)$ sur une fermeture (F, ν) : $p'(\nu, \mu)$ est la fermeture sur $\mathrm{HOM}_{\mathfrak{J}_\bullet(\mathfrak{M})^\circ}(\mathfrak{P}(F), \mathfrak{P}(E))$ dont les ouverts sont les réunions quelconques d'ensembles de la forme

$$\mathcal{W}(V, U) = \{ R \in \mathrm{HOM}_{\mathfrak{Z}_a(\mathfrak{M})^\circ}(\mathfrak{P}(F), \mathfrak{P}(E))/R(U) \cap V \neq \emptyset \},$$

où U est un ouvert de μ et V un ouvert de ν.

La topologie $\tau(p'(\nu, \mu))$ engendrée par $p'(\nu, \mu)$ sera notée $p(\nu, \mu)$.

On a donc, pour trois fermetures μ, ν, ξ (avec ν associée à une topologie) :

$$\mathrm{HOM}_{\Sigma(\mathfrak{M})^\circ}(p(\xi, \mu), \nu) = \mathrm{HOM}_{\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ}(\xi, \Omega(\mu, \nu)).$$

3. Convergences compactes. — La définition universelle de la topologie de la convergence compacte [1] et les adjonctions du paragraphe 1 ci-dessus nous permettent d'affirmer que, (E, μ) étant un espace topologique localement compact et $\mu \times_{\mathfrak{T}^0}$ désignant le foncteur produit par (E, μ) de $\mathfrak{T}^0$ vers $\mathfrak{T}^0$, *le foncteur* $(\mathfrak{C}^0, \iota, \mathfrak{T}^0) \circ (\mathfrak{T}^0, \mu \times_{\mathfrak{T}^0}, \mathfrak{T}^0)$ *admet un coadjoint* $c_{\mathfrak{C}^0}(-, \mu)$. Notons $c'_{\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ}(\nu, \mu)$ la fermeture sur $\mathrm{HOM}_{\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ}(\nu, \mu)$ dont les ouverts sont les réunions quelconques d'ensembles de la forme

$$\mathcal{W}_c(V, K) = \{ R \in \mathrm{HOM}_{\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ}(\nu, \mu)/K \subset (d(R))\ (V) \}$$

pour K compact de (E, μ) et V ouvert de (F, ν). Alors $c_{\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ}(\nu, \mu)$ est la topologie $\tau(c'_{\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ}(\nu, \mu))$, que l'on abrégera en $\overline{p}(\nu, \mu)$. On a donc, en formule, avec (E, μ) topologique localement compact, (F, ν) topologique, et (H, ξ) muni d'une fermeture :

$$\mathrm{HOM}_{\Sigma(\mathfrak{M})^\circ}(\overline{p}(\xi, \mu), \nu) = \mathrm{HOM}_{\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^\circ}(\xi, \mu \times_{\mathfrak{T}^0} \nu).$$

On désignera par $c(\xi, \mu)$ la topologie de la convergence compacte sur l'ensemble des applications continues de μ vers ξ.

Les injections canoniques de $c(\xi, \mu)$ *dans* $\overline{p}(\xi, \mu)$ *et de* $\overline{p}(\xi, \mu)$ *dans* $p(\xi, \mu)$ *sont continues.*

4. Homotopies. — Les résultats ci-dessus suggèrent plusieurs notions de déformation continue entre relations, relations s. c. i., relations s. c. s., relations s. c. i. et s. c. s. Donnons, en particulier :

Définition 1. — *Deux relations* R_0 *et* R_1 *entre deux fermetures* μ *et* ξ *seront dites i-homotopes (resp. i-faiblement homotopes) s'il existe une application* h *de l'intervalle* $[0, 1]$ *dans* $\overline{p}(\xi, \mu)$ *[resp. dans* $p(\xi, \mu)$*] telle que* $h(0) = R_0$ *et* $h(1) = R_1$.

On a des définitions analogues dans les cas s. c.s. et fortement continue (f. c) (c'est-à-dire s. c. i. et s. c. s.).

On pourra aussi s'intéresser aux « multihomotopies » entre relations. Donnons, par exemple :

Définition 2. — *Deux relations* R_0 *et* R_1 *entre deux fermetures* μ *et* ξ *seront dites* (i, s)*-homotopes [resp.* (i, s)*-faiblement homotopes] s'il existe une relation s. c. s.* $\mathcal{H}$ *de l'intervalle* $[0, 1]$ *dans* $\overline{p}(\xi, \mu)$ *[resp. dans* $p(\xi, \mu)$*]*

telle que $\mathcal{H}(\{0\}) = \{R_0\}$ *et* $\mathcal{H}(\{1\}) = \{R_1\}$. On définirait de même les (s, s)-homotopies et (s, s)-homotopies faibles, les (c, i)-homotopies et (c, i)-homotopies faibles, etc.

(*) Séance du 28 septembre 1970.

(1) A. BASTIANI, *Topologie*, 2, Cours multigraphié, Amiens, 1969.

(2) R. GUITART, *Comptes rendus*, 270, série A, 1970, p. 1398.

(3) R. GUITART, *Comptes rendus*, 270, série A, 1970, p. 1572.

(4) Néanmoins on identifiera fréquemment une relation R et l'application J (R) entre ensembles de parties correspondantes.

(5) On utilisera les termes s. c. i. et s. c. s. même lorsque μ et ν ne seront pas associées à des topologies.

(6) E. MICHAEL, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71, 1951, n° 1 : *Topology on spaces of subsets.*

(Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
33, rue Saint-Leu,
80-Amiens, Somme.)

182518. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.