SUR LES CONTRIBUTIONS DE CHARLES EHRESMANN
A LA THEORIE DES CATEGORIES *

René Guitart (Paris 7)

----

Dans un prochain numéro des Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle on trouvera une bibliographie complète des travaux de C. Ehresmann, comprenant environ 120 titres, parmi lesquels 60 - publiés ces 20 dernières années - sont consacrés à la théorie des catégories ; voici quelques indications sommaires sur cette dernière partie de ses travaux .

1 . Vers 1957 les recherches d'Ehresmann l'ont amené à considérer comme fondamentale la notion de structure locale, c'est-à-dire de structure définie par la donnée d'un atlas complet compatible avec un pseudogroupe de transformations. Il developpe cela ensuite avec, par exemple, l'étude systématique de diverses extensions de l'idée d'atlas, comme ce qu'il appelle fusées et superfusées, dans le cadre général des groupoïdes inductifs et <u>catégories ordonnées</u> (i. e. catégories dont l'ensemble des morphismes est ordonné de sorte que la composition des morphismes et les fonctions "domaine" et "codomaine" soient croissantes - cf. § 4) . Le théorème qu'il juge principal à ce sujet est ce qu'il appelle théorème d'élargissement complet d'une espèce de structure locale ou plus généralement d'une catégorie ordonnée inductive au-dessus d'une autre : ainsi, très particulièrement, en appliquant ce théorème à la catégorie des applications $C^n$ entre ouverts d'espaces numériques $R^p$ on obtient la construction de la catégorie des variétés $C^n$ . Cette partie des travaux représente plus de 700 pages dans lesquelles il est fructueux de lire aujourd'hui l'éclairage original qu'Ehresmann a donné sur les questions de faisceaux, algèbres de Heyting (qu'il appelle treillis locaux, et qui sont maintenant d'actualité dans les travaux de théorie des topos sous le nom de "local"), et sur l'holonomie et la cohomologie des catégories ordonnées. (A ce sujet il introduit comme outil les "catégories d'opérateurs sur les catégories", qu'il appelle "espèces de morphisme", et qui ne sont rien de plus que les fibrations scindées de Grothendieck, mais sous la forme adéquate à l'"internalisation", que l'on pratique maintenant couramment, dans un topos par exemple).



* Paru dans la Gazette des mathématiciens, S.M.F., n°13 ,février 1980,pp.37-43.

2 . Dans le but probable de couvrir aussi le cas des structures locales, en 1960 Ehresmann pense à itérer transfiniment la méthode de Bourbaki de description des espèces de structures par schéma de construction d'échelon, et il obtient ainsi la catégorie des foncteurs types, introduisant en même temps pour la première fois la 2-catégorie des transformations naturelles entre foncteurs . Les catégories ordonnées et la 2-catégorie des transformations naturelles sont des exemples de catégories doubles , dont Ehresmann donne la définition en 1961 . Il donne l'exemple de la catégorie double des carrés commutatifs d'une catégorie fixée, et surtout le cas de la catégorie double Q(Cat) dont les 2-blocs sont de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "P"'] & Y \arrow[d, "S"] \\ X \arrow[r, "R"'] \arrow[ur, "t"] & B \end{tikzcd}$$

avec $P, Q, R, S$ foncteurs, $t : R.P \rightarrow S.Q$ transformation naturelle. Plusieurs auteurs ont mis l'accent sur le cas particulier important de catégories doubles que sont les 2-catégories. En fait si à la place de Cat on prend une 2-catégorie abstraite $\underline{C}$ , on peut, en considérant comme 2-blocs les quintettes $(P, Q, R, S \,;\, t)$ avec $P, Q, R, S$ 1-morphismes de $\underline{C}$ et $t : R.P \rightarrow S.Q$ 2-morphisme de $\underline{C}$ , obtenir une catégorie double $Q(\underline{C})$ . Il est remarquable que dans le dernier article qu'Ehresmann publie (avec sa femme Andrée Ehresmann, en 1979) on trouve ce théorème suivant lequel toute catégorie double se plonge dans une catégorie double de la forme $Q(\underline{C})$ .

3 . Dans plusieurs textes et cours, Ehresmann a très clairement décrit sa conception de la géométrie différentielle (comprise en particulier avec les outils introduits antérieurement par lui-même : espaces fibrés, G-structures, calculs des jets, prolongements infinitésimaux, connexions) comme essentiellement l'étude des catégories différentiables et fondamentalement de la catégorie différentiable des jets (ayant pour objets les germes de variétés et pour morphismes les jets infinitésimaux d'ordre $n$ fixé de germes d'applications $C^n$ entre ces objets) . Par exemple, pour lui un espace fibré consiste avant tout en un groupoïde différentiable ayant pour objets les fibres, et pour morphismes des difféomorphismes entre ces fibres (rappe-

lons qu'un groupoïde est, suivant la définition donnée en 1926 par H. Brandt, la même chose qu'une catégorie dont tous les morphismes sont inversibles). De ce point de vue, les prolongements de variétés, d'espaces fibrés, deviennent des prolongements de catégories différentiables particulières, et on les obtient par simple application des foncteurs jets .

4 . Catégories ordonnées, topologiques, différentiables, doubles, sont des cas particuliers d'objets catégories internes à une catégorie C , et dans ces cas (où donc C = Ord, Top, Diff ou Cat) on dispose de plus d'un foncteur $U : C \to$ Ens. Ehresmann préfère alors parler de catégorie U-structurée, la notion de catégorie interne ne se dégageant que plus tard (sous le nom de catégorie structurée généralisée), en "oubliant le foncteur d'oubli" U .

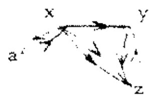
Ehresmann a découvert la bonne définition universelle du quotient $X \int r$ d'un objet X de C par une équivalence r sur U(X) : c'est ce qu'il appelle le U-quasiquotient de X par r . Dans le cas où X est une structure algébrique, $X \int r = X/\bar{r}$ , le quotient de X par la relation d'équivalence compatible avec la structure algébrique en question engendrée par r (notée $\bar{r}$). De manière semblable il introduit la notion de U-sous-structure $\bar{A}$ de X engendrée par $A \subset U(X)$ . Il étudie ensuite les catégories U-structurées essentiellement à l'aide de ces deux outils. Dans le cas spécial C = Cat il obtient, avant Gabriel-Zisman, des résultats très précis sur le calcul des catégories de fractions. Toutefois ces résultats, sous la forme où ils sont repris dans "Catégories et Structures", chapître 5, sont difficiles à reconnaître ; il faut les lire dans le texte original paru en 1961. Dans le cas C = Top , il reprend de nombreux résultats sur les groupes topologiques et les adapte aux catégories topologiques. Cela donne en 1966 trois articles directement accessibles .

5 . En 1966, non informé des travaux (inédits à cette époque) de Gabriel-Ulmer, Ehresmann introduit les esquisses , très voisines des catégories marquées de Chevalley, puisque ce sont des "graphes multiplicatifs" marqués de cônes. il n'explicite pas du tout le lien avec les sites et catégories de faisceaux, car il faut dire que son point de vue est tout autre que celui de Grothendieck. En effet, Ehresmann n'aime pas travailler "hom par hom" avec l'outil fondamental qu'est le lemme de Yoneda (voir néanmoins le chapître 6) et il préfère toujours les calculs et descriptions "dessinées" par de petits diagrammes bien visuels. Cela se rattache probablement à sa for-

mation en topologie algébrique, et se voit jusque dans sa manière graphique de représenter les diagrammes dans les catégories. Par exemple là où tout le monde écrirait :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, shift left] \\ A \arrow[r] & X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Z \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

il écrit :



Ainsi, pour lui une catégorie est d'abord un graphe orienté, plus une loi de composition des paires de flèches consécutives ; vers 1965 cela fait une différence entre lui et les autres catégoriciens, différence conceptuelle, à laquelle s'ajoute des différences de notations : il emploie "(F, $\underline{f}$, E)" pour "f : E → F", "$\alpha$ et $\beta$" pour "dom et cod", "e'.C'.e" pour "$HOM_C(e, e')$". Avec parfois le choix d'une terminologie à l'apparence "provisoire" (comme plus haut le terme "quasi-quotient") pour des concepts au demeurant simples et excellents, cela a certainement contribué à une mauvaise diffusion des travaux catégoriques d'Ehresmann, jusqu'en 1970 environ. Mais revenons aux esquisses .

Il existe une esquisse $s_{cat}$ (à savoir le début de la catégorie simpliciale) telle que la catégorie CONT($s_{cat}$, Ens) des foncteurs continus de $s_{cat}$ vers Ens soit équivalente à Cat . Alors les catégories U-structurées, avec U : C → Ens , sont précisément les objets de CONT($s_{cat}$, C) , et beaucoup de résultats à leur sujet sont encore valables si $s_{cat}$ est remplacée par une autre esquisse s décrivant un autre type de structure .

La définition d'Ehresmann de foncteur adjoint (comme "éjecteur") est moins agréable que celle de Kan ; d'un autre côté, il travaille toujours sous la forme "locale" (= existence d'objet libre), ce qui est la manière naturelle de construire les adjoints. Travaillant avec des univers de Grothendieck emboités, il donne en particulier un théorème d'existence de structures libres dont la preuve est une imitation des constructions de compactifications ou complétions en topologie (avec U : C → Ens, la U-structure libre sur E est $\overline{\lim}(E \xrightarrow{\text{cano}} \prod_{E\to U(Y)} Y))$ .

Dans le même esprit, il construit le "type" associé à une esquisse, diverses complétions de catégories et catégories structurées, de foncteurs et foncteurs structurés. Ces derniers résultats semblent maintenant intéresser beaucoup de gens, les catégoriciens allemands en particulier .

6 . A côté des catégories structurées, l'autre manière d'enrichir les catégories, hom par hom , intéresse néanmoins Ehresmann (ainsi, dans son cours de maîtrise de 1967-68, il donne à un moment une présentation personnelle des catégories additives et de l'algèbre homologique). Et même, inspiré surtout d'exemples venant de l'analyse (e. g. catégories où les homs sont des espaces de Banach, de Fréchet, ... ) il donne dans des cas particuliers la définition des <u>catégories dominées</u> , dont la "bonne" formulation viendra plus tard (1965) avec la notion de V-catégorie (Eilenberg-Kelly). Dans les articles qu'il publie à partir de 1972 avec sa femme, il adopte la terminologie des V-catégories et catégories monoïdales, et aussi, progressivement, les notations des autres catégoriciens. Dans l'article de 1972 intitulé "Catégories of sketches structures", après avoir présenté la théorie des esquisses sous une forme très simple il donne les principales méthodes pour obtenir des enrichissements et des produits tensoriels sur les catégories de la forme CONT(s, Ens) . Cela constitue une belle illustration de la méthode des esquisses. Et l'étude du cas $s = s_{cat}{}^{\otimes n}$ , c'est-à-dire l'étude des catégories n-uples, avec en particulier les notions de limites "relachées" ou lax-lim (très voisines des limites homotopiques) dans les catégories doubles, est développée dans 4 articles qui se suivent de 1974 à 1979 et constituent un véritable livre .

Nous nous sommes limité ici à un survol très rapide, et le lecteur voulant en savoir davantage trouvera en référence une sélection de textes d'Ehresmann directement lisibles .

L'influence exercée par cette oeuvre, aussi bien sur certains mathématiciens étrangers que sur les très nombreux élèves qu'Ehresmann a dirigés et accueillis dans son séminaire, a été très grande, et l'on connait déjà certains perfectionnements ou prolongements d'idées ou de thèmes inventés ou travaillés par Ehresmann ; sur cela il serait utile de donner des explications (comme première indication signalons que, en théorie des catégories, Andrée et Charles Ehresmann ont fait préparer une quarantaine de thèses de 3e cycle et une dizaine de thèses d'Etat). Rappelons aussi que, en 1965, un prix de l'Académie (le prix Petit d'Ormoy) a été décerné à Ehresmann, pour ses travaux en théorie des catégories . Aujourd'hui, on peut voir dans ses travaux

une évolution très nette de problèmes particuliers vers des problèmes de plus en plus généraux, avec dans les 4 derniers articles un retour, à l'aide d'outils plus puissants, vers les problèmes sur les catégories doubles des années 1960-63. Mais le retour aux structures locales et à la géométrie différentielle, source des préoccupations catégoriques d'Ehresmann, reste à accomplir.
En réalité il n'est pas sûr qu'Ehresmann lui-même ait désiré à toute force prouver l'"utilité" - fusse par rapport à ses motivations originelles des années 1955-1960 - des théories qu'il développait (souvent librement, pour leurs propres beautés). Très certainement l'intérêt en soi de la théorie des catégories naissante, et ses relations avec de nombreux autres domaines des mathématiques, le passionnaient et motivaient aussi profondément. Cela est particulièrement clair si l'on se rappelle ce qu'il disait de l'art mathématique : "le mathématicien est engagé dans la poursuite d'un rêve sans fin, dont la traduction en formules précises exige un effort extraordinaire. (...) Je ne crois pas qu'un mathématicien voit dans cette efficacité [dans les applications pratiques] la justification de ses efforts car le vrai but de son rêve perpétuel est de comprendre la structure de tout chose".

REFERENCES


1 - Structures locales, Annali di Mat., 1954, p. 133-142.

- Gattungen von lokalen strukturen, Jahres. der Deutschen Math. Ver. 60, 1957.

- Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, Ann. inst. Fourier, Grenoble 14, 1, 1964, p. 205-268.

- Guide des catégories ordonnées, Cahiers Top. Géo. Diff. 7, 1965.

- Elargissement complet d'un foncteur local, Cahiers Top. Géo. Diff. XI-2, 1969.

2 - Catégorie des foncteurs types, Rev. Un. Mat. Argentina, 20, 1960.

- Catégories doubles des quintettes ; applications covariantes, C. R. A. S. Paris, 256, 1963.

3 - Prolongements de catégories différentiables, Cahiers Top. Géo. Diff. 6, 1964.

- Propriétés infinitésimales des catégories différentiables, Cahiers Top. Géo. Diff. IX, 1966.

- Catégories in differential geometry, in Colloque sur l'algèbre des catégories, Amiens 1973, publié dans Cahiers Top. Géo. Diff. XIV, 2, p. 23.

4 - Structures quotients, Com. Math. Helv. 38, 1965, p. 219-283.

- Structures quasi-quotients, Math. Ann. 171 (1967), p. 293.

- On the definition of structured categories, Tech. Rep. U. of Kansas, 1966.

- Catégories structurées généralisées, Cahiers Top. Géo. Diff. X, 1969.

- Catégories et structures (chapitre 5), Dunod Ed., Paris 1965.

- Catégories topologiques I, II, III, Nederl. Ak. van Wetenschappen, Proc. 69, 2, 1966, p. 133-175.

5-6 - Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Inst. Polit. din Iasi, nouvelle série, XIV-1-2, 1968.

- Categories of sketched structures, Cahiers Top. Géo. Diff. XIII-2, 1972.

- Construction de structures libres, in Springer Lecture Notes n° 92, 1967.

- Multiple functors I, II, III, IV, Cahiers Top. Géo. Diff. XV-3, XIX-3-4, XX-1.