Diagrammes, Vol. 3 , 1980.

EXTENSEURS.

R. Guitart.

<u>Définition</u>. On appelle <u>extenseur</u> dans une catégorie $\underline{C}$ la donnée (A,E) , où $A \in \underline{C}_o$ et où, pour tous X , $Y \in \underline{C}_o$,

$$E\colon (X \xrightarrow[a]{} A\ ,\ X \xrightarrow[p]{} Y) \longmapsto E_p a\colon Y \longrightarrow A\ ,$$

avec les trois conditions:

1. (composabilité) si $\xrightarrow[p]{} \xrightarrow[q]{}$, alors $E_q\, E_p a = E_{q.p} a$;
2. (ponctualité) si le carré

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "h'"'] & \cdot \arrow[d, "h"] \\ \cdot \arrow[r, "p"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

est un produit fibré, alors $E_p(a).h = E_{p'}(a.h')$;

3. (adjonction) si $\xleftarrow[p]{} \underset{h}{\overset{h'}{\leftrightarrows}} \xrightarrow[q]{}$ satisfait

$p.h'.h = p$ et $q.h.h' = q$, alors $E_q(a.p.h') = E_q(E_h(a.p))$.

<u>Théorème</u>. <u>Dans un topos avec axiome du choix, les extenseurs sont précisément les sup-treillis complets</u> .

<u>Esquisse de preuve</u>. Si $\mathcal{P}$ est la monade des parties du topos, un treillis complet est une $\mathcal{P}$-algèbre, et donc un certain foncteur $(\mathrm{Kl}/\mathcal{P})^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$. Mais, dans ce cas, $\mathrm{Kl}/\mathcal{P}$ est isomorphe à $\mathrm{REL}(\mathbb{C}) =: \mathrm{SPAN}(\mathbb{C})/\equiv$, avec

$$(X \xleftarrow{p} U \xrightarrow{q} Y) \equiv (X \xleftarrow{r} V \xrightarrow{s} Y)$$

si, et seulement si, il existe h et h' tels que $p.h = r$, $q.h = s$, $r.h' = p$ et $s.h' = q$ (et en fait, pour $\mathbb{C}$ à $\varprojlim$ finies, l'existence d'un adjoint à droite à $\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{REL}(\mathbb{C})$ équivaut à $\mathbb{C}$ topos avec axiome du choix).

N.B.-Ce théorème reste vrai si, dans 2., "produit fibré" est remplacé par "carré exact".
Inversement, on peut définir les carrés (A,E)-exacts par la condition 2., pour tout a.

- Dans des catégories autres que des topos, les structures "treillis complet" et "extenseurs" peuvent différer notablement. Par exemple, dans un groupoïde, tout objet a une structure canonique d'extenseur (donnée par $E_p a = a.p^{-1}$), mais n'a pas obligatoirement de structure de treillis complet.