Ann. sc. math. Québec, 1980, Vol. IV, No 2, pp. 103-125

RELATIONS ET CARRÉS EXACTS

René Guitart

Le but de ce texte est de jeter un pont entre logique et homologie, en exposant le calcul de l'exactitude (et ses liens avec le calcul des relations) dans une 2-catégorie symétrique (section 3) et dans une Yoneda-structure uniforme (section 4) en général, mais d'abord en traitant le cas particulier de la 2-catégorie CAT (section 1).

Dans la section 1, nous introduisons le concept de *carré exact* dans une 2-catégorie représentable (cf. H. §1.4) et donnons dans le cas de la 2-catégorie CAT une série de conditions équivalentes (critère du zig-zag, critères locaux, critères de comparaisons aux commas, ou aux co-commas, critère de la multiplication, critère de préservation des extensions inductives ponctuelles, critère de préservation des extensions projectives ponctuelles, règles de composition, de dualité, d'exponentiation). Nous voyons alors que ces carrés exacts sont une généralisation commune à toutes les situations suivantes: *suites exactes* usuelles, suites exactes de Jaffard-Poitou; carrés exacts de Hilton dans une catégorie abélienne; extensions absolues, limites absolues, foncteurs opaques, copleinement fidèles ou riches; adjonctions partielles (i.e. relèvements absolus), *adjonctions*, foncteurs pleinement fidèles; carrés commas et co-commas. La fin de la section 1 indique pourquoi il nous semble préférable maintenant dans l'étude de l'exactitude dans Ab de considérer Ab comme sous 2-catégorie (sans 2-morphismes) de CAT, et de calculer dans CAT.

A la section 2, on pose le problème de l'analyse des *réseaux exacts*, à la section 3, on indique une possibilité de solution de ce problème par des "calculs de relations"; on observe que les diverses manières d'aborder le "calcul des relations" (Benabou, Guitart, Hilton, Meisen, Street-Walters, Coppey) induisent chacune une notion d'exactitude, et que réciproquemment, toute notion d'exactitude détermine une congruence sur une bicatégorie de spans, qui en quelque sorte la représente.

A la section 4, on définit et on caractérise les carrés exacts dans une yoneda-structure au sens de Street-Walters [26] et on souligne la possibilité de définir dans ce cadre les *carrés ponctuels*. C'est probablement quand on aura bien saisi les liens entre carrés exacts et carrés ponctuels qu'on pourra construire une approche axiomatique solide de l'exactitude dans les 2-catégories.

A la section 5, nous définissons les *foncteurs opaques*, exposons leur lien avec les extensions absolues et avec les carrés exacts, et montrons leur rôle vis-à-vis de la Categorical Shape Theory de Deleanu-Frei-Hilton (voir A. Frei [7]) et vis-à-vis des extensions de Kan de Théories cohomologiques (voir J.L. Mac Donald [20]). Ce sont en fait les résultats obtenus en premier [10], car pour aboutir aux carrés exacts, nous sommes partis des limites absolues de R. Paré [23], nous sommes passés par la condition de Beck-Chevalley [4] et le théorème du zig-zag d'Isbell [13], et n'avons que tardivement observé le lien de ces questions avec les carrés exacts dans les catégories abéliennes (au sens de Lambek [18], Mac Lane, Brinkman-Puppe, Hilton [16]), ce qui a suggéré les définitions $\underline{H}$ et $\underline{M}$ de la section 1.

Une version préliminaire de ce texte a été mise en circulation en mai 1978, exposée à Oberwolfach en août 1979 [12].

On trouvera des prolongements (carrés exacts dans Ens, dans Gr, extensions des méthodes aux 2-catégories non-représentables) dans van den Bril [28], des applications à la déduction dans [13], aux catégories avec modèles dans [29].

0. NOTATION

On appelle *carré dans une 2-catégorie* la donnée de quatre objets A , B , X , Y , de quatre 1-morphismes $S : A \to X$, $T : A \to Y$, $U : X \to B$, $V : Y \to B$, de un 2-morphisme $\varphi : U \cdot S \to V \cdot T$. Un tel carré sera désigné par la figure

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & Y \arrow[d, "V"] \\ X \arrow[r, "U"'] \arrow[ur, phantom, "\varphi"] & B \end{tikzcd}$$

On emploiera aussi les trois écritures condensées

$$\varphi : S \xrightarrow[U]{T} V \ ,$$

$$S \xrightarrow{(U,T;\varphi)} V \ ,$$

$$\varphi : U \cdot S \to V \cdot T \ .$$

1. EXACTITUDE DANS LA 2-CATÉGORIE CAT

1.0. La bicatégorie des bimodules [ou profoncteurs, ou distributeurs] est notée BIM , et la composition y est notée $\otimes$. On sait (voir [2], [8], [15], [27]) que le plongement $CAT \to BIM : F \mapsto [\cdot,F-]$ est 2-plein, que $F \approx [\cdot,F-] \dashv [F\cdot,-] = :F^{o}$, de sorte que si $\varphi : U \cdot S \to V \cdot T$ est un carré dans CAT , il détermine un 2-morphisme de BIM $\tilde{\varphi} : S \otimes T^{o} \rightarrow U^{o} \otimes V$, avec

$$\tilde{\varphi}_{x,y}(a) : X[x,Sa] \times Y[Ta,y] \to B[Ux,Vy]$$

$$: (m,n) \mapsto Vn \cdot \varphi_{a} \cdot Um \ .$$

1.1. Définition. Un carré $\varphi : U \cdot S \to V \cdot T$ de CAT est dit *exact* ssi

<u>BC</u> : $\tilde{\varphi} : X[\cdot,S-] \otimes Y[T(\cdot),-] = :S \otimes T^{o} \to U^{o} \otimes V: = B[U(\cdot),V(-)]$

est un isomorphisme.

1.2. Théorème (critère du zig-zag).

1^o Vu la valeur de $\widetilde{\varphi}$ et la composition $\otimes$ s'effectuant à l'aide de cofins [19], φ exact équivaut à:

<u>BC'</u> : $\forall x \in X_o$, $\forall y \in Y_o$, les $\widetilde{\varphi}_{x,y}(a)$ induisent un isomorphisme

$$\widetilde{\varphi}_{x,y} : \int^a X[x,Sa] \times Y[Ta,y] \xrightarrow{\cong} B[Ux,Vy] .$$

2^o Vu le calcul des cofins par colimites [21], φ exact équivaut à:

<u>BC"</u> : $\forall x \in X_o$, $\forall y \in Y_o$, les $\widetilde{\varphi}_{x,y}(a)$ induisent un isomorphisme

$$\hat{\varphi}_{x,y} : \varinjlim[T \downarrow y \to A \xrightarrow{X[x,S-]} \mathrm{Ens}] \xrightarrow{\cong} [B[Ux,Vy]] .$$

Et, de manière symétrique, on obtient l'équivalent:

<u>BC"^{op}</u> : $\forall x \in X_o$, $\forall y \in Y_o$, les $\widetilde{\varphi}_{x,y}(a)$ induisent un isomorphisme

$$\check{\varphi}_{x,y} : \varinjlim[(x\downarrow S)^{op} \to A^{op} \xrightarrow{Y[T^{op}(-),y]} \mathrm{Ens}] \xrightarrow{\cong} B[Ux,Vy] .$$

3^o Puisque $\varinjlim = \pi_o K$ dis [14], on peut expliciter 2^o, et φ exact équivaut à:

<u>ZZ</u> : i) $\forall x \in X_o$, $\forall y \in Y_o$, $\forall p : Ux \to Vy \in B$, il existe

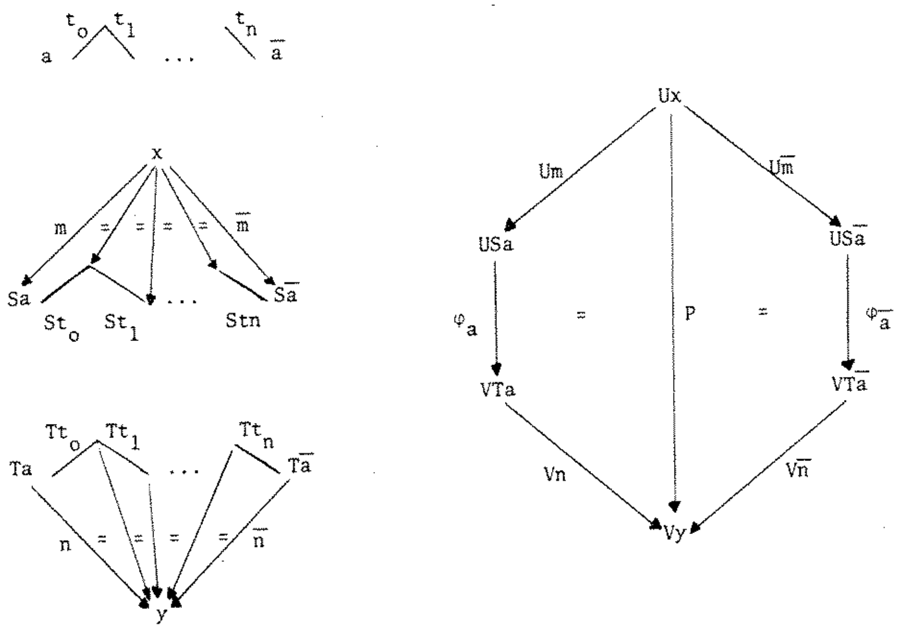
$$a, m : x \to Sa , \qquad n : Ta \to y ,$$

avec $Vn \cdot \varphi_a \cdot Um = p$.

ii) Pour tout (a,m,n) , $(\overline{a},\overline{m},\overline{n})$ tels que $Vn \cdot \varphi_a \cdot Um = V\overline{n} \cdot \varphi_{\overline{a}} \cdot U\overline{m}$, il existe un zig-zag

$$a \nearrow t_0 \searrow t_1 \nearrow \ \dots \ t_n \searrow \overline{a}$$

dans A tel qu'en lui appliquant T et S il existe des lanternes comme sur le dessin ci-après:



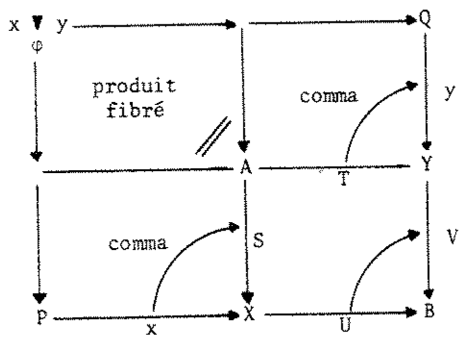
1.3. Théorème. (critères locaux).

1° φ exact équivaut, grâce à <u>ZZ</u> , à la condition <u>LI</u> (local initialité) ou à la condition <u>LF</u> (local finalité) :

<u>LI</u> : $x \in X_o$, $x \downarrow S \to Ux \downarrow V$ est initial .

<u>LF</u> : $y \in Y_o$, $T \downarrow y \to U \downarrow Vy$ est final .

2° Pour tout P , Q , $x : P \to X$, $y : Q \to Y$, on considère



et $x \underset{\varphi}{\blacktriangledown} y : x \underset{\varphi}{\triangledown} y \to Ux \downarrow Vy$ le foncteur induit.

Si $\pi_o(x \underset{\varphi}{\downarrow} y)$ est une bijection, on dit que φ *est exact en* $\binom{x}{y}$, et on écrit: $\binom{x}{y} \models \varphi$. Alors φ exact équivaut à:

$$\underline{\pi_o\nabla} : \forall P,Q\ ,\quad \forall x : P \to X\ ,\quad \forall y : Q \to Y\ ,\qquad \binom{x}{y} \models \varphi\ .$$

1.4. Théorème (critères de comparaison aux commas, aux co-commas).
On désigne par

$$\begin{tikzcd}
U \downarrow V \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_o"'] & Y \arrow[d, "V"] \\
X \arrow[r, "U"'] \arrow[ur, phantom, "a"] & B
\end{tikzcd}$$

le carré comma de U et V, et par $\overline{\varphi} : A \to U \downarrow V$ l'unique morphisme tel que $a \cdot \overline{\varphi} = \varphi$.

Pour tout Z, $P : X \to Z$, $Q : Y \to Z$, on a

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CAT}(Pd_o,Qd_1) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dd, "\sum_{P,Q}\overline{\varphi}"'] & \mathrm{BIM}(d_o d_1^o, P^oQ) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dd, phantom, "="] & \mathrm{BIM}(U^oV, P^oQ) \arrow[dd, "\sum_{P,Q}\widetilde{\varphi}"] \\
 & & \\
\mathrm{CAT}(PS,QT) \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \mathrm{BIM}(ST^o, P^oQ)
\end{tikzcd}$$

où $\sum_{P,Q}\widetilde{\varphi}$ et $\sum_{P,Q}\overline{\varphi}$ désignent les foncteurs composition avec $\widetilde{\varphi}$ et $\overline{\varphi}$.

Puisque tout bimodule peut, dans CAT, s'écrire sous la forme P^oQ, d'après le lemme de Yoneda, $\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme ssi les applications $\sum_{P,Q}\widetilde{\varphi}$ sont bijectives, si bien que φ exact équivaut à:

$\underline{H}$: $\forall Z$, $\forall P : X \to Z$, $\forall Q : Y \to Z$, l'application

$$\textstyle\sum_{P,Q}\overline{\varphi} : \mathrm{CAT}(Pd_o,Qd_1) \to \mathrm{CAT}(PS,QT)$$

est bijective.

On a évidemment un critère analogue $\underline{H}^{op}$ avec les co-commas. Une 2-catégorie $\mathbb{K}$ représentable et co-représentable où $\underline{H} \Leftrightarrow \underline{H}^{op}$ sera dite *symétrique*. C'est le cas de CAT .

1.5. Définition. Dans une 2-catégorie $\mathbb{K}$, on appelle *carré multiplicatif* la donnée d'un carré $\varphi : s \xrightarrow[u]{t} v$ et, pour tout R , Ω , $p : R \to X$, $q : R \to Y$, $f : X \to \Omega$, $g : Y \to \Omega$, $\alpha : u \cdot p \to v \cdot q$, $\beta : f \cdot s \to g \cdot t$, la donnée d'un 2-morphisme $\beta \underset{\varphi}{\otimes} \alpha : f \cdot p \to g \cdot q$, avec les conditions

<u>unitarité</u>: $\beta \underset{\varphi}{\otimes} \varphi = \beta$, $\varphi \underset{\varphi}{\otimes} \alpha = \alpha$, $\forall \alpha$, $\forall \beta$.

<u>bilinéarité</u>: $(b\beta) \otimes (\alpha a) = b(\beta \otimes \alpha)a$, $\forall a : R' \to R$, $\forall b : \Omega \to \Omega'$.

Si $\mathbb{K}$ possède des objets commas et co-commas, la donnée de $\underset{\varphi}{\otimes}$ revient, avec $d_o \xrightarrow[U]{d_1} V$ comma et $S \xrightarrow[i_o]{T} i_1$ co-comma, à la donnée d'un $\otimes : i_o \cdot d_o \to i_1 \cdot d_1$ tel que

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & Y \arrow[dr, "V"] & \\ A \arrow[ur, "T"] \arrow[dr, "S"'] & \arrow[u, phantom, "\varphi"] & B \\ & X \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & & Y \arrow[dr, "i_1"] & & \\ A \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \cdot \arrow[ur, "d_1"] \arrow[dr, "d_o"'] & \arrow[u, phantom, "\otimes"] & \cdot \arrow[r, "\underline{\varphi}"] & B \\ & & X \arrow[ur, "i_o"'] & & \end{tikzcd}$$

et alors $\beta \underset{\varphi}{\otimes} \alpha = \underline{\beta} \cdot \otimes \cdot \overline{\alpha}$.

Dans une catégorie $\mathbb{K}$ (vue comme 2-catégorie sans 2-morphismes) on retrouve les carrés exacts de Grandis [9].

Si $\mathbb{K} = \mathrm{CAT}$, $\otimes : i_o \cdot d_o \to i_1 \cdot d_1$ revient à la donnée de

$$\widetilde{\otimes} : u^o v = d_o d_1^o \to i_o^o \cdot i_1 = s \cdot t^o$$

avec, pour tout α , β ,

$$\widetilde{\alpha} \cdot \widetilde{\otimes} \cdot \widetilde{\varphi} = \widetilde{\alpha} \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi} \cdot \widetilde{\otimes} \cdot \widetilde{\beta} = \widetilde{\beta} .$$

Mais, comme $p \cdot q^o$ est un bimodule général, ainsi que $f^o \cdot g$, on peut prendre $p \cdot q^o = u^o \cdot v$, $\widetilde{\alpha} = s$, $f^o \cdot g = s \cdot t^o$, $\widetilde{\beta} = 1$, et il vient $\widetilde{\otimes} = \widetilde{\varphi}^{-1}$, et φ

exact. On observe directement avec $\underline{H}$ que si φ est exact, on a la structure multiplicative $\nu \underset{\varphi}{\otimes} \mu = (\sum_{f,g} \overline{\varphi})^{-1}(\nu) \cdot \overline{\mu}$. D'où:

1.6. Théorème (critère de la multiplication).

$\underline{M}$: Un carré $\varphi : U \cdot S \to V \cdot T$ de CAT est exact ssi il possède une structure $\otimes$ de carré multiplicatif (et alors $\otimes$ est unique, donnée par $\tilde{\otimes} = \tilde{\varphi}^{-1}$) .

1.7. Théorème (critère de préservation des extensions inductives ponctuelles).

$\underline{PP}$: Un carré $\varphi : U \cdot S \to V \cdot T$ de CAT est exact ssi, pour toute extension inductive ponctuelle,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "U"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\overset{\beta}{\Rightarrow}"', shift right=4ex] & & B \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

(voir [21], [25]), le triangle composé

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "T"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\overset{\varphi}{\Rightarrow}"] & & Y \arrow[d] \\ X \arrow[rr, "U"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\overset{\beta}{\Rightarrow}"', shift right=4ex] & & B \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

est encore une extension inductive ponctuelle. En effet, soit $G : Y \to Z$. D'après $\underline{H}$ pour φ , on a $NAT(FS,GT) \simeq NAT(Fd_o,Gd_1)$, et par hypothèse sur β , on a $NAT(Fd_o, Gd_1) \simeq NAT(RV,G)$. Donc $R\varphi \cdot \beta S : FS \to (RV)T$ est une extension, et c'est une extension ponctuelle, grâce au théorème 1.6.

Pour la réciproque, $\underline{BC}''$ signifie que $\forall x \in X_o$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "S"'] & & Y \arrow[d, "V"] \\ X \arrow[rr, "U"'] \arrow[dr, "{[x,-]}"'] \arrow[urr, phantom, "\varphi"] & {} \arrow[d, phantom, "i_x"] & B \arrow[dl, "{[Ux,-]}"] \\ & \mathrm{Ens} & \end{tikzcd}$$

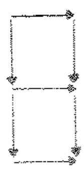
$$\left[\begin{array}{l} \text{avec } i_x(x') : [x,x'] \to [Ux,Ux'] \\ \qquad\qquad\qquad f \mapsto U(f) \end{array}\right]$$

est une extension ponctuelle. Pour conclure, il reste à voir que $[ux,-]$ est extension ponctuelle de $[x,-]$ le long de U .

1.8. Théorème (règle de composition).

D'après $\underline{BC}$, dans CAT , les carrés exacts se composent horizontalement,

ou verticalement,



1.9. Théorème (règle de dualisation).

Dans CAT , on a:

$$\underline{D}\ :\quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\varphi"] & Y \arrow[d, "V"] \\ X \arrow[r, "U"'] & B \end{tikzcd} \quad \text{exact} \iff \begin{tikzcd} A^{op} \arrow[r, "S^{op}"] \arrow[d, "T^{op}"'] \arrow[dr, phantom, "\varphi^{op}"] & X^{op} \arrow[d, "U^{op}"] \\ Y^{op} \arrow[r, "V^{op}"'] & B^{op} \end{tikzcd} \quad \text{exact .}$$

En effet, cela est évident sur les critères $\underline{ZZ}$, $\underline{H}$ ou $\underline{M}$. Sur la définition de Street, on voit que $\lambda : G \cdot V \to F$ est une extension projective ponctuelle ssi $\lambda^{op} : F^{op} \to G^{op} \cdot V^{op}$ est une extension inductive ponctuelle, et alors en appliquant le principe de dualisation $\underline{D}$ et $\underline{PP}$, on obtient:

1.10. Théorème (critère de préservation des extensions projectives ponctuelles).

$\underline{PP^*}$: Un carré $\varphi : U \cdot S \to V \cdot T$ de CAT est exact ssi, pour toute extension projective ponctuelle

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "F"] \arrow[dd, "V"'] & \\ \arrow[r, phantom, "\lambda"] & E \\ B \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd} ,$$

le composé

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\varphi"] & Y \arrow[d] \arrow[dr] & \\ X \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[u, phantom, shift right=6, "\lambda"] & E \end{tikzcd}$$

est une extension projective ponctuelle.

Dans toute 2-catégorie avec commas et co-commas $\underline{H} \Rightarrow \underline{PP}$ et $\underline{H} \Rightarrow \underline{PP^*}$; cela vaut pour CAT et pour CAT^{op} . Si l'on appelle relèvement inductif (projectif) co-ponctuel dans CAT une extension inductive (projective) ponctuelle dans CAT^{op} :

1.11. Théorème (conditions de préservations).

Si dans CAT , $\varphi : U \cdot S \to V \cdot T$ est exact, alors

$\underline{PP}$: φ préserve les extensions inductives ponctuelles sous U .

$\underline{PP*}$: φ préserve les extensions projectives ponctuelles sous V .

$\underline{PP}^{op}$: φ préserve les relèvements inductifs co-ponctuels sur T .

$\underline{PP*}^{op}$: φ préserve les relèvements projectifs co-ponctuels sur S .

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr, "\underline{PP}^{op}"] & & \\
& A \arrow[rr, "T"] \arrow[dd, "S"'] \arrow[ddrr, phantom, "\varphi"] & & Y \arrow[dd, "V"] \arrow[dr] & \\
\bullet \arrow[ur, "\underline{PP*}^{op}"] \arrow[dr] & & & & \bullet \\
& X \arrow[rr, "U"'] \arrow[dr, "\underline{PP}"'] & & B \arrow[ur, "\underline{PP*}"'] \arrow[dl] & \\
& & \bullet & &
\end{tikzcd}$$

1.12. Définition. Dans une 2-catégorie $\mathbb{K}$, on appelle *carré exact fort* [resp. *carré exact absolu*] un carré $\varphi : s \xrightarrow[u]{t} v$ tel que pour tout $X \in \mathbb{K}_o$, $\mathbb{K}[X,\varphi]$ soit exact dans CAT [resp. pour tout 2-foncteur $\Phi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$, $\Phi(\varphi)$ est exact dans $\mathbb{L}$] .

1.13. Théorème (règle d'exponentiation).

Dans CAT un carré est exact ssi il est exact fort.

1.14. Exemples (dans CAT) .

En appliquant les critères précédents $\underline{BC}$, $\underline{BC'}$, $\underline{BC''}$, $\underline{BC''}^{op}$, $\underline{ZZ}$, $\underline{LI}$, $\underline{LF}$, $\underline{\pi_o\nabla}$, $\underline{H}$, $\underline{H}^{op}$, $\underline{M}$, $\underline{PP}$, $\underline{PP*}$ (tous équivalents dans CAT) et les règles de composition, de dualisation, d'exponentiation, on obtient immédiatement les exemples suivants:

1) $1 : 1 \xrightarrow[F]{F} 1$ et $1 : F \xrightarrow[1]{1} F$ sont exacts (évident avec $\underline{M}$).

D'après Street [25], cela équivaut au lemme de Yoneda; on appellera ces carrés des *carrés Yoneda*.

2) Un carré *comma* $a : d_o \xrightarrow[U]{d_1} V$ est exact.

3) Un carré *co-comma* $b : S \xrightarrow[i_o]{T} i_1$ est exact.

4) $1 : 1 \xrightarrow[F]{1} F$ est exact ssi F est *pleinement fidèle*.

5) $1 : F \xrightarrow[1]{F} 1$ est exact ssi F est *co-pleinement fidèle*.

6) $\varepsilon : 1 \xrightarrow[1]{L} U$ est exact ssi $L \dashv U(\varepsilon,?)$ (*adjonction*).

7) $\eta : U \xrightarrow[L]{1} 1$ est exact ssi $L \dashv U(?,\eta)$ (*adjonction*).

8) $\varepsilon : 1 \xrightarrow[Y]{L} U$ est exact ssi $L \underset{Y}{\dashv} U(\varepsilon)$ (i.e. L est *adjoint partiel* le long de Y à U).

9) $\varphi : S \xrightarrow[1]{T} V$ est exact ssi (V,φ) est *extension inductive absolue* de S le long de T [cf. §5.1].

10) $\varphi : S \xrightarrow[U]{T} 1$ est exact ssi (U,φ) est *extension projective absolue* de T le long de S .

1.15. Lien avec l'exactitude dans Ab .

1° Les conditions $\underline{H}$ et $\underline{PP}$ et $\underline{M}$ ont un sens dans toute 2-catégorie représentable; et sont non-équivalentes en général. A fortiori dans toute catégorie (vue).

2° Comme 2-catégorie sans 2-morphismes autre que les identités sur les 1-morphismes, $\underline{H}$ et $\underline{PP}$ ont un sens. Ainsi (voir Hilton [16]) dans Ab un carré

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "0^A"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & 0 \arrow[d, "0_B"] \\
X \arrow[r, "U"'] & B
\end{tikzcd}$$

est exacte au sens $\underline{H}$ ssi la suite A X B est exacte en X .

3° Puisque $Ab \hookrightarrow CAT$, le carré ci-dessus $1 : S \xrightarrow[U]{0^A} 0_B$ peut être regardé comme carré dans CAT ; il est exact dans la 2-catégorie CAT ssi $A \to X \to B \to 0$ est exacte en X <u>et</u> en B .

4° <u>Le calcul de l'exactitude dans</u> CAT <u>est donc un élargissement de celui fait dans</u> Ab ; dans cet esprit, les carrés exacts absolus (e.g. les adjonctions, les carrés Yonedas) (cf. 1.12) généralisent les suites exactes scindées, et $\tilde{\varphi}$ représente l'*homologie* du carré φ .

2. <u>RÉSEAUX EXACTS D'UNE</u> 2-<u>CATÉGORIE SYMÉTRIQUE</u>

2.0. Dans une 2-catégorie comme BIM , les formules $\tilde{\varphi} : s \cdot t^o \nrightarrow u^o \cdot v$ avec $t \dashv t^o$, $u \dashv u^o$ (ou $\varphi : t_o \cdot s \overset{\sim}{\nrightarrow} v \cdot u_o$ avec $t_o \dashv t$, $u_o \dashv u$) , sont des formules d'échange entre "2-fractions" (ou "2-co-fractions") droites et gauches. Dans cette perspective d'un calcul de fractions 2-dimensionnels, les réseaux exacts correspondent aux *formules d'échange d'ordres supérieurs*, comme par exemple ci-après $(\tilde{\varphi}_1 u_2^o v_2) \cdot (s_1 t_1^o \tilde{\varphi}_2) : s_1 \cdot t_1^o \cdot s_2 \cdot t_2^o \overset{\sim}{\nrightarrow} u_1^o \cdot v_1 \cdot u_2^o \cdot v_2$.

2.1. Définition. Dans une 2-catégorie symétrique (cf. 1.4) $\mathbb{K}$, on dira que la figure $[\varphi_1 : s_1 \xrightarrow[u_1]{t_1} v_1 \ , \ \varphi_2 : s_2 \xrightarrow[u_2]{t_2} v_2]$,

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "t_1"] & & & & A_2 \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "t_2"] & \\
X_1 \arrow[dr, "u_1"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\varphi_1}{\longrightarrow}"] & & Y_1 \arrow[dl, "v_1"] & = & X_2 \arrow[dr, "u_2"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\varphi_2}{\longrightarrow}"] & & Y_2 \arrow[dl, "v_2"] \\
 & B_1 & & & & B_2 &
\end{tikzcd}$$

est un *réseau exact en* (X_1, Y_2) ssi la figure complétée,

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] & \text{comma} & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\cdot \arrow[dr] & \varphi_1 & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] & \varphi_2 & \cdot \arrow[dl] \\
 & \cdot \arrow[dr] & \text{co-comma} & \cdot \arrow[dl] & \\
 & & \cdot & &
\end{tikzcd}$$

est un carré exact (au sens $\underline{H}$ ou $\underline{H}^{op}$) . [De même un réseau-plan plus complexe sera dit exact si en le complétant "aux places vides" par des petits carrés commas ou co-commas, on obtient un grand carré exact.] En particulier si $t_1 : A_1 \to X_2$, φ_2 sera dit *t-exact* (ou exact en t) ssi $[1 \underset{t}{\xrightarrow{t}} 1 , \varphi_2]$ est exact en (A_1,Y_2) . Si $1 : t \underset{1}{\xrightarrow{t}} 1$ est t-exact, on dit que t est *opaque* [cf. §5.2].

2.2. *Remarque*. La caractérisation des réseaux exacts dans Ab ou dans CAT est immédiate grâce au calcul des relations additives dans Ab et au calcul des bimodules dans CAT . Pour une 2-catégorie symétrique quelconque, on devra utiliser un "calcul de relations" adéquate, décrit à la section 3. Pour une 2-catégorie avec Yoneda-structure, voir un calcul à la section 4.

3. CALCULS DE RELATIONS versus TYPES D'EXACTITUDES

3.1. Si l'on dispose de deux 2-foncteurs $\underline{\mathbb{K}} \underset{J}{\overset{J^o}{\rightrightarrows}} \mathbb{B}^{op}_{\mathbb{B}}$ tels que $\forall X \in \mathbb{K}_o$, $J^oX = JX$, on peut définir un carré exact de $(\mathbb{K},J,J^o)$ comme un quadruplet (s,t,u,v) de $\underline{\mathbb{K}}$ tel que

$$Js \cdot J^ot \cong J^ou \cdot Jv .$$

3.2. Réciproquement, soit $\mathbb{E}$ une classe de carré de $\mathbb{K}$. On note Span $\mathbb{K}$ le système multiplicatif ayant pour termes les spans $X \xleftarrow{a} R \xrightarrow{b} Y$ de $\underline{K}$, et où la composition est définie — à isomorphismes près — par

$$(\underline{S};c,d) \cdot (\underline{R};a,b) = (b\dotplus c\ ;\ a\cdot c'\ ,\ d\cdot b')\ ,$$

avec $c' \xrightarrow[b]{b'} c$ un carré comma.

On désigne par $\equiv_{\mathbb{E}}$ la plus petite équivalence sur Span $\mathbb{K}$ telle que Span $\mathbb{K}/\equiv_{\mathbb{E}}$ soit une bicatégorie et telle que $(A;p,q) \equiv_{\mathbb{E}} (B;r,s)$ dès que $\exists u,v$, $\alpha : u \cdot p \to v \cdot q \in \mathbb{E}$, $\beta : u \cdot r \to v \cdot s \in \mathbb{E}$. En supposant que $\mathbb{E}$ contient les carrés-Yoneda, on retrouve une situation du type 3.1.

3.3. *Théorème.*

1° Suivant 3.1 et 3.2, à chaque "calcul de relations" sur $\mathbb{K}$, on sait associer une "notion d'exactitude" dans $\mathbb{K}$, et inversement si $\mathbb{E}$ est une classe de carrés décrétés exacts de $\mathbb{K}$, on construit un calcul de relations avec Span $\mathbb{K}/\equiv_{\mathbb{E}}$.

2° Avec $\mathbb{E} = \mathbb{H}(\mathbb{K})$, la classe des carrés exacts au sens $\underline{H}$, on démontre que

$$\mathrm{Span(Ab)}/\equiv_{\mathbb{H}(\mathrm{Ab})} \simeq \mathrm{Rel\ Ab}$$

et

$$\mathrm{Span(CAT)}/\equiv_{\mathbb{H}(\mathrm{CAT})} \simeq \mathrm{BIM}\ .$$

(On sait qu'inversement, $\mathbb{H}$(Ab) et $\mathbb{H}$(CAT) se décrivent par 3.1 à partir de Rel Ab et BIM respectivement.)

3° Dans le théorème 3.4 de l'article de Meisen [22], on peut prendre $\mathrm{Hom}_{\underline{X}'}(X,Y) = \mathrm{Fix}(\mathbb{C}_{X,Y})$ avec $\mathbb{C}_{X,Y}$ le triple induit sur Span(X,Y) par l'adjonction

$$[\underline{\text{co-comma}} : \mathrm{Span}(X,Y) \to \text{co-Span}(X,Y)] \dashv [\underline{\text{comma}} : \text{co-Span}(X,Y) \to \mathrm{Span}(X,Y)]\ .$$

Si $\mathbb{K}$ = Ab , on obtient $\underline{X}' \cong$ Rel Ab . Si $\mathbb{K}$ = CAT , on obtient $\underline{X}' \cong$ BIM .

3.4. En fait, *divers calcul de relations de la littérature sont de la forme* Span $\mathbb{K}/R$ [voir "Monades involutives complémentées", pp. 35, 41, cité dans [11]]. Ainsi sont les relations associées aux décompositions de Coppey [5] sur $\mathbb{K}$, les constructions par Meisen [22] de $\underline{\text{Pull}}$ ($\mathbb{K}$) et de Rel_M où (E,M) est une décomposition de Kelly, et les relations dans les Yoneda-structures uniformes (§4).

3.5. Pour une catégorie K, soit $REL(K)$ le quotient de $\mathrm{Span}\ K$ par $(\underline{R};a,b) \sim (\underline{R}';a',b')$ ssi $\exists u$, $\exists v$ avec $a \cdot u = a'$, $b \cdot u = b'$, $a' \cdot v = a$, $b' \cdot v = b$.

La notion de carré exact correspondante est celle de carré semi-cartésien.

On obtient aussi les carrés semi-cartésiens comme les exacts d'un topos relativement à son calcul usuel de relations. Cela vaut bien sûr pour Ens, où la condition $\underline{H}$ a un sens différent.

4. CARRÉS EXACTS ET PONCTUELS DANS LES YONEDA-STRUCTURES UNIFORMES

4.0. Soit $\mathbb{K}$ une 2-catégorie munie d'une Yoneda-structure au sens de Street-Walters [26] (voir aussi [25]) c'est-à-dire d'un idéal à droite $\mathbb{A}\mathrm{d} \subset K_1 = K$ de flèches "admissibles", et de la donnée pour tout $A \in \mathbb{A}\mathrm{d}_o$ d'un morphisme "de Yoneda" $Y_A : A \to PA$ jouissant de la propriété que pour tout $f : A \to B$ de $\mathbb{A}\mathrm{d}$ il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "Y_A"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\chi^f}"] & B \arrow[dl, "{B(f,1)}"] \\ & PA & \end{tikzcd}$$

tel que χ^f présente $B(f,1)$ comme extension inductive de Y_A le long de f, tel que χ^f présente f comme relèvement absolu (= adjoint partiel) de Y_A à travers $B(f,1)$, et tel que, pour tout $k : B \to PA$ et $\sigma : B(f,1) \to k$, σ soit un isomorphisme ssi $(\sigma f) \cdot \chi^f$ présente f comme relèvement absolu de Y_A à travers k. Alors Street et Walters montrent que

$$(Y_B \cdot f\ ,\ 1) = Pf$$

détermine un pseudo-2-foncteur P, et que de plus, si $j : A \to B$ est tel que A, B et $B(j,1)$ soient admissibles, alors $Pj \dashv \forall j$, avec

$$PA(B(j,1),1) = \forall f\ .$$

Exemples: CAT , $\mathbb{V}\cdot$ CAT , CAT(E) pour E topos.

4.1. *Définition.* On appelle *Yoneda-structure uniforme sur* K une Yoneda-structure comme ci-dessus (4.0) au sens [26] telle que, de plus,

- les extensions X^f sont ponctuelles;
- pour tout $g : B \to PC$, il existe Z , $B \xrightarrow{b} Z \xrightarrow{c} C$ avec

$g = P(c)\cdot Y_Z \cdot b$.

Exemples: CAT , les cosmos uniformes de [25].

4.2. *Définitions.*

1° Un carré $\varphi : s \xrightarrow[u]{t} v$ est dit *admissible* si s , t , $u \in \mathbb{A}d$, si $X(s,1) \in \mathbb{A}d$, si Ps a un adjoint à droite $\exists s$. Alors φ détermine $\tilde{\dot{\varphi}} : \exists s \cdot Y(t,1) \to B(u,1)\cdot v$ "comme" dans le cas de CAT et des bimodules (§1).

2° Si φ est admissible, φ est dit *exact* ssi $\underline{BC}^{\#}$: $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme.

3° Si φ et $\tilde{\varphi}$ sont admissibles, φ est dit *Y-ponctuel* ssi $\tilde{\varphi}$ est exact.

4.3. *Théorème.*

1° Dans une 2-catégorie $\mathbb{K}$ avec Yoneda-structure, un carré φ admissible est exact ($\underline{BC}^{\#}$) ssi il satisfait

$\underline{PP}^{\#}$: le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "u"] \arrow[ur, phantom, "\varphi"] \arrow[dr, "Y_X"'] & B \arrow[d, "B(u{,}1)"] \\ & PX \end{tikzcd}$$

X^u

présente $B(u,1)\cdot v$ comme extension inductive de $Y_X \cdot s$ le long de t .

2° Si la Yoneda-structure est uniforme, alors $\underline{PP}^{\#} \Leftrightarrow \underline{H}$, pour les carrés φ tel que u soit admissible.

3° Les adjonctions partielles et extensions absolues sont (comme dans le cas de CAT) des carrés exacts $(\underline{BC}^{\#})$.

5. FONCTEURS OPAQUES, EXTENSIONS ABSOLUES, ET APPLICATION À LA PRO-LOCALISATION

5.0. En fait, à l'origine de notre définition et de notre étude des carrés exacts comme ci-avant aux sections 1 à 4, il y a l'étude de la thèse de Paré sur les limites absolues [23] et les caractérisations des extensions absolues données en [10] (et reprenant partiellement des résultats de Thiébaud [27] et de Harting [15]).

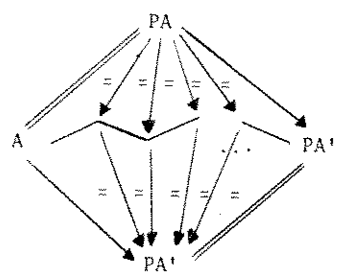
5.1. Définition. On appelle *extension inductive absolue* un diagramme dans CAT

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[rr, "\overline{U}"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\varphi}{\rightarrow}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "R"] \\ & \underline{Z} & \end{tikzcd}$$

tel que, pour tout foncteur $H : \underline{Z} \to \underline{K}$, le composé $H\varphi$ est une extension de Kan inductive $(HR \simeq \mathrm{Lan}_J\, HF)$.

5.2. Définition. Un foncteur $\underline{P} : \underline{A} \to \underline{B}$ est dit *opaque* si $\forall A,A' \in \underline{A}_o$, $\forall b : PA \to PA' \in \underline{B}$, il existe un zig-zag

dans $\underline{A}$, dont l'image par $\underline{P}$ s'incorpore à une lanterne de la forme



5.3. *Théorème* (extensions absolues *versus* foncteurs opaques).

1° φ est une extension absolue ssi φ est une extension ponctuelle et se calcule par colimites absolues, ou encore ssi $\mathrm{Yon}_{\underline{Z}} \cdot \varphi$ est une extension.

2° Comme dit au §1.14 (avec 1.1), φ est une extension absolue ssi $\varphi : F \xrightarrow[1]{J} R$ est exact, i.e. $\tilde{\varphi}$ isomorphisme (dans ce cas, le critère de zig-zag et les critères locaux prennent des formes plus spéciales (voir [10])).

3° est une extension absolue ssi, avec $d_o \xrightarrow[U]{d_1} F$ carré comma, le foncteur induit $J \cdot d_1 \downarrow Y \to \underline{Z} \downarrow R$ est opaque surjectif sur les objets.

4° Comme dit au §2.1, $P : \underline{A} \to \underline{B}$ est opaque ssi le carré

$$\begin{tikzcd}
P \downarrow P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r, "P"] \arrow[d, "P"] \arrow[dr, phantom, "//"] & B \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "P"'] \arrow[ur, phantom, "\text{comma}"] & B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd}$$

est exact, i.e. (cf. §1.1) ssi $P \otimes \tilde{1}_{\underline{P}} : P^o \otimes P \otimes P^o \tilde{\to} P^o$ est un isomorphisme, ou encore ssi le pro-cotriple sur $\underline{B}$ associé à P (voir [15], [27]) est idempotent.

5° Si $\underline{B}_P$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{B}$ ayant pour objets les $\underline{P}(A)$, $A \in \underline{A}_o$, P opaque équivaut à:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[rr] \arrow[dr, "P"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & B_P \arrow[dl] \\
& \underline{B} &
\end{tikzcd}$$

extension inductive absolue.

6° $\underline{P}$ est opaque ssi $P = \underline{T} \circ Q$ avec $\underline{T}$ pleinement fidèle et Q co-pleinement fidèle.

7° Grâce au théorème du zigzag d'Isbell, si P est bijectif sur les objets, alors P opaque <=> P épimorphisme de CAT .

5.4. *Définition.* Un foncteur $P : \underline{A} \to \underline{B}$ sera dit *consistant* s'il satisfait la "condition C" de Frei [7] ce qui, suivant [16], p. 241, équivaut à:

$$\underline{C}' : \forall A \in \underline{A}_o , \quad P(A) \underset{\mathrm{CAMO}}{\simeq} \underleftarrow{\lim}[(P(A)\downarrow P) \to \underline{A} \xrightarrow{P} \underline{B}] ,$$

et ce qui, avec Linton [19], revient à dire que $\exp_{\underline{P}}^{op}$ est pleinement fidèle sur les paires $(B,P(A))$.

5.5. *Définition.* Un foncteur $P : \underline{A} \to \underline{B}$ sera dit *très riche* ssi

$$\underline{TR} : \quad \forall A,A' \in \underline{A} , \quad \forall b : P(A) \to P(A') \in \underline{B} , \quad \exists A \xleftarrow{r} V \xrightarrow{r'} A' \quad \text{dans } \underline{A}$$

tel que $P(r)^{-1}$ existe et que $b = P(r') \cdot P(r)^{-1}$.

5.6. *Théorème* (conditions de pro-localisations).

1^o Pour tout foncteur, on a:

très riche => riche (Hilton) => opaque => consistant (Frei) ,

les réciproques étant fausses en général.

2^o Un foncteur opaque est consistant *et* co-consistant.

3^o Si $L \dashv U$, alors U opaque <=> L opaque .

4^o Si $L \dashv U$, alors pour U les quatre notions de 1^o sont équivalentes.

5.7. *Remarque.* Un autre usage important des foncteurs opaques est le suivant: Mac Donald [20] démontre que l'extension de Kan de théories cohomologiques peut se faire le long de foncteurs riches; en fait, cela peut encore se faire le long de foncteurs opaques (et plus généralement avec des carrés exacts.

6. RÉFÉRENCES

[1] Applegate, H. et Tiernay, M., *Categories with models*, Lectures Notes in Maths 80, pp. 156-244, Springer, 1969.

[2] Bénabou, J., *Les distributeurs*, Rapport no 33, Séminaire de maths pures, Louvain-la-Neuve, 1973.

[3] Calvo, B., *Dominions de foncteurs relatifs I et II*, Comm. Algebra 2, pp. 97-127 et pp. 129-150, 1975.

[4] Chevalley, C., Séminaire sur la descente 1964-1965, non publié.

[5] Coppey, L., *Décompositions de structures en produits*, Esq. Math. 14, Paris, 1977.

[6] Deleanu, A. et Hilton, P., *On the categorical shape of a functor*, Fondam. Math., 1975.

[7] Frei, A., *On categorical shape theory*, Cahiers top. géo. dif., XVII, 3, 1976.

[8] Gouzou, M.F. et Grunig, R., *Caractérisation de Dist.*, C.R.A.S., t. 276, p. 519, Paris, 1973.

[9] Grandis, M., *Symétrisations de catégories et factorisations quaternaires*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Série VIII, Vol. XIV, Fasc. 5, Roma, 1977.

[10] Guitart, R., *Extensions de Kan absolues*, Math. Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagunsbericht Kategorien, pp. 42-44, Août 1977.

[11] Guitart, R., *Calcul des relations inverses*, Cahiers top. géo. dif., XVIII, 1, 1977.

[12] Guitart, R., a) *Carrés exacts*, b) *Tenseurs et machines*, Math. Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagunsbericht Kategorien (1 p.), Août 1979.

[13] Guitart, R., *Qu'est-ce que la logique dans une catégorie?*, à paraître dans Cahiers top. géo. dif. dans les Proceedings du 3^{e} Colloque d'Amiens sur les catégories dédié à Charles Ehresmann (juillet 1980).

[14] Guitart, R. et Van den Bril, L., *Décompositions et lax-complétions*, Cahiers top. géo. dif., XVIII, 4, 1977.

[15] Harting, R., *Distributoren und Kan-Erweiterungen*, Archiv Math., Vol. XXIX, Fasc. 4, 1977 (et conférence à Oberwolfach en 1973).

[16] Hilton, P., *Correspondances and exact squares*, Proc. conf. on cat. alg., La Jolla, Springer, 1966.

[17] Isbell, J.R., *Epimorphisms and dominions*, Proc. conf. on cat. alg., La Jolla, Springer, 1966.

[18] Lambek, J., *Goursat's theorem and the Zassenhaus lemma*, Can. Journal. Math., 1958.

[19] Linton, F.E.J., *An outline of functorial semantics*, Lectures Notes in Maths, 80, pp. 7-59, Springer, 1969.

[20] Mac Donald, J.L., *Natural factorizations and the Kan extension of cohomologies theories*, Cahiers top. géo. dif., XVII, 1, 1976.

[21] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

[22] Meisen, J., *On bicategories of relations and pullback spans*, Com. Algebra, 1, pp. 377-401, 1974.

[23] Paré, R., *Absoluteness property in category theory*, Thesis, Mc Gill Univ., June 1969.

[24] Riguet, J., *Quelques propriétés des relations difonctionnelles*, C.R.A.S., t. 230, p. 1999, Paris, 1950.

[25] Street, R.H., *Elementary cosmoi*, Cat. Sem. Sydney, Lectures Notes in Math., 420, p. 134, Springer, 1974.

[26] Street, R.H. et Walters, R., *Yoneda structures on 2-categories*, preprint.

[27] Thiébaud, M., *Self-dual structure - semantics and algebraic categories*, Thesis, Halifax, 1971.

[28] Van den Bril, L., *Carrés exacts de Hilton dans des contextes non-abéliens*, Ann. sc. math. Qué., Vol. 4, No 2, 1980.

[29] Van den Bril, L., *Exactitude dans les Yoneda-structures*, à paraître dans Cahiers top. géo. dif. dans les Proceedings du 3^{e} Colloque d'Amiens sur les catégories dédié à Charles Ehresmann (juillet 1980).

[30] Wood, R.J., *Abstract pro-arrows I*, preprint.

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris 7
2, place Jussieu
75005 Paris 20

Manuscrit reçu le 15 janvier 1979.
Revisé le 15 novembre 1980.