Diagrammes, Vol. 5, 1981.

CRITERES DE RIGIDIFICATION
DES
MORPHISMES SOUPLES
ENTRE
STRUCTURES INTERNES

R. Guitart et C. Lair

1. Morphismes rigides entre structures internes.

1.1. Désignons par P (resp. E) un <u>prototype</u>, c'est-à-dire une catégorie $\underline{P}$ (resp. $\underline{E}$) où l'on a distingué des limites projectives et inductives (voir (E.T.S.A.)).

Le prototype P décrit des <u>structures internes à</u> E : ce sont les <u>réalisations</u> (ou faisceaux) de P vers E , c'est-à-dire les foncteurs $f\colon \underline{P} \longrightarrow \underline{E}$ qui commutent avec les limites distinguées.

De ce point de vue, une première description des morphismes entre ces structures vient naturellement: ce sont justement les transformations naturelles entre ces réalisations. On obtient ainsi une catégorie E^{P}, sous-catégorie pleine de la catégorie $\underline{E}^{\underline{P}}$ de tous les foncteurs (préfaisceaux).

<u>Exemple</u> 1. Désignons par Ens le prototype obtenu en distinguant dans $\underline{Ens}$ toutes les limites projectives et inductives petites. Notons aussi $\underline{P}^{op} = \underline{P}_{cat}{}^{op}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Cat}$

dont les objets sont les catégories $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$ et $\underline{4}$. Notons enfin P_{cat} le prototype obtenu, par dualité, en distinguant dans $\underline{P}_{cat}{}^{op}$ les deux sommes fibrées:

$$\underline{3} = \underline{2} \underset{\underline{1}}{+} \underline{2} \qquad \text{et} \qquad \underline{4} = \underline{3} \underset{\underline{2}}{+} \underline{3} \quad .$$

Evidemment, $Ens^{P_{cat}}$ et $\underline{Cat}$ sont équivalentes.

<u>Exemple</u> 2. On peut également décrire explicitement un prototype <u>projectif</u> (i. e. où seules des limites projectives sont distinguées) $P_{2\text{-}cat}$ tel que la catégorie 2-$\underline{Cat}$, ayant pour objets les 2-catégories petites et pour morphismes les 2-foncteurs, soit équivalente à la catégorie $Ens^{P_{2\text{-}cat}}$.

<u>Exemple</u> 3. Soit $\mathbb{T}$ un triple sur $\underline{Ens}$. On sait qu'alors la catégorie $Alg(\mathbb{T})$ des algèbres de $\mathbb{T}$ est équivalente à une catégorie de la forme $Ens^{P_{\mathbb{T}}}$, où $P_{\mathbb{T}}$ est une théorie de Linton (voir (A.O.F.S.)).

<u>Autres exemples</u>. Sont également de la forme Ens^{P} (pour un prototype P convenable, qui n'est plus nécessairement projectif) les catégories de faisceaux sur un site, les topos de Grothendieck, la catégorie des corps, celle des espaces topologiques ...

1.2. Donnons, maintenant, une description moins naïve des catégories E^{P} , qui explique leur canonicité et leur naturalité (en E et P).

Notons $\underline{PROTO}$ la catégorie dont les objets sont les prototypes et dont les morphismes sont les réalisations (nous omettons volontairement de prendre en considération les problèmes de taille tant que la nécessité ne s'en fera pas essentiellement sentir - ce qui sera, par contre, le cas au n°3).

La catégorie $\underline{\text{PROTO}}$ possède une co-catégorie interne:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}: & \mathbb{1} & \mathbb{2} \arrow[l, "i'"'] \arrow[from=1-2, to=1-3, bend left, "a'"] \arrow[from=1-2, to=1-3, bend right, "b'"'] \arrow[r, "k'"] & \mathbb{3} \arrow[r, bend left, "k'_1"] \arrow[r, bend right, "k'_2"'] & \mathbb{4}
\end{tikzcd}
$$

Cette co-catégorie interne est canonique, en ce sens que, naturellement en tout objet P de $\underline{\text{PROTO}}$, la catégorie (ensembliste) $\text{Hom}(\mathbb{C},P) = (\mathbb{C},P)$, décrite ci-dessous:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{C},P): & (\mathbb{1},P) \arrow[r, "{(i',P)}"] & (\mathbb{2},P) \arrow[l, bend right=60, "{(a',P)}"'] \arrow[l, bend left=60, "{(b',P)}"] & (\mathbb{3},P) \arrow[l, "{(k',P)}"'] & (\mathbb{4},P) \arrow[l, bend right, "{(k'_1,P)}"'] \arrow[l, bend left, "{(k'_2,P)}"]
\end{tikzcd}
$$

est isomorphe à la catégorie $\underline{P}$. Autrement dit, le foncteur "catégorie sous-jacente" $\underline{\text{PROTO}} \longrightarrow \underline{\text{CAT}}$ est équivalent au foncteur $\text{Hom}(\mathbb{C},-) = (\mathbb{C},-) : \underline{\text{PROTO}} \longrightarrow \underline{\text{CAT}}$.

Nous savons d'autre part (voir (E.G.C.E.)) que $\underline{\text{PROTO}}$ est monoïdale, symétrique et fermée: elle est donc munie d'un bi-foncteur "Hom interne":

$$/-,-/ : \underline{\text{PROTO}}^{\text{op}} \times \underline{\text{PROTO}} \longrightarrow \underline{\text{PROTO}} \qquad ,$$

et d'un bi-foncteur "produit tensoriel":

$$\boxtimes : \underline{\mathrm{PROTO}} \times \underline{\mathrm{PROTO}} \longrightarrow \underline{\mathrm{PROTO}}$$

pour lequel le prototype $\mathbb{1}$ est l'unité.

Dans ces conditions, nous associons canoniquement à tout objet P de $\underline{\mathrm{PROTO}}$, et naturellement en P, la co-catégorie interne à $\underline{\mathrm{PROTO}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \boxtimes P : \mathbb{1} \boxtimes P \arrow[r, bend left, "a' \boxtimes P"] \arrow[r, bend right, "b' \boxtimes P"'] & \mathbb{2} \boxtimes P \arrow[l, "i' \boxtimes P"'] \arrow[r, "k' \boxtimes P"] & \mathbb{3} \boxtimes P \arrow[r, bend left, "k'_1 \boxtimes P"] \arrow[r, bend right, "k'_2 \boxtimes P"'] & \mathbb{4} \boxtimes P
\end{tikzcd}$$

(où l'on peut identifier $\mathbb{1} \boxtimes P$ à P et où $\mathbb{2} \boxtimes P$ a pour catégorie sous-jacente $\underline{2} \times \underline{P}$).

De même, nous associons canoniquement à tout objet E de $\underline{\mathrm{PROTO}}$, et naturellement en E, la catégorie interne à $\underline{\mathrm{PROTO}}$:

$$\begin{tikzcd}
/\mathbb{C},E/ : /\mathbb{1},E/ \arrow[r, "/i',E/"] & /\mathbb{2},E/ \arrow[l, bend right, "/a',E/"'] \arrow[l, bend left, "/b',E/"] & /\mathbb{3},E/ \arrow[l, "/k',E/"'] & /\mathbb{4},E/ \arrow[l, bend right, "/k_1,E/"'] \arrow[l, bend left, "/k_2,E/"]
\end{tikzcd}$$

(où $/\mathbb{1},E/$ peut être identifié à E et où la catégorie sous-jacente à $/\mathbb{2},E/$ est $\underline{E}^{\underline{2}}$, qui s'identifie à l'une des structures de catégorie possibles sur l'ensemble des carrés commutatifs de $\underline{E}$ - voir (C.A.S.T.)).

Nous disposons donc d'isomorphismes de catégories (ensemblistes), naturels en les objets P et E de $\underline{\text{PROTO}}$:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{C} \boxtimes P, E) = (\mathbb{C} \boxtimes P, E) \sim E^{P} \sim (P, /\mathbb{C}, E/) = \mathrm{Hom}(P, /\mathbb{C}, E/) \ .$$

Les morphismes de l'une quelconque de ces catégories seront appelés <u>morphismes rigides</u> (ou <u>canoniques</u>) entre les structures internes à E décrites par P .

2. <u>Morphismes souples entre structures internes</u>.

2.1. Si E et P sont deux prototypes, il arrive, dans la pratique, que les morphismes de E^{P} soient en quantité insuffisante ou, plus précisément, que E^{P} apparaisse comme sous-catégorie d'une catégorie plus vaste $\overline{E^{P}}$ ayant les mêmes objets.

<u>Exemple</u> 1. La catégorie $\underline{\mathrm{Cat}}$ (identifiée à $\mathrm{Ens}^{P_{cat}}$) est bien sous-catégorie de la catégorie $\overline{\underline{\mathrm{Cat}}}$ ayant mêmes objets mais ayant pour morphismes $n: \underline{A} \dashrightarrow \underline{B}$ les transformations naturelles $n: f \Longrightarrow g$, où $f, g : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ sont deux foncteurs.

<u>Exemple</u> 2. La catégorie $2\text{-}\underline{\mathrm{Cat}}$ (identifiée à $\mathrm{Ens}^{P_{2\text{-}cat}}$) est bien sous-catégorie de la catégorie $\overline{2\text{-}\underline{\mathrm{Cat}}}$ ayant mêmes objets mais ayant pour morphismes les lax-2-foncteurs.

<u>Exemple</u> 3. Soit $\underline{E}$ une catégorie et $\overline{\overline{T}}$ une pro-monade sur $\underline{E}$ (c'est-à-dire une monade sur $\underline{\mathrm{Ens}}^{\underline{E}^{op}} = \underline{E}^{\wedge}$). Si l'endofoncteur $\overline{T} : \underline{E}^{\wedge} \longrightarrow \underline{E}^{\wedge}$ commute aux limites inductives, il est entièrement déterminé par sa restriction ("aux co-représentables") $\tilde{T}: \underline{E} \longrightarrow \underline{E}^{\wedge}$. Dans ce cas, on dispose donc d'un foncteur injec-

773

tif sur les objets $L'_{\overline{\overline{\Pi}}} : \underline{E} \xrightarrow[\text{Yoneda}]{} \underline{E}^{\wedge} \xrightarrow[\text{canonique}]{} Kl(\overline{\overline{\Pi}})$.

Si l'unité $\varepsilon : Id_{\underline{E}^{\wedge}} \longrightarrow \overline{T}$ est un mono , on dispose donc bien d'un foncteur (restriction de $L'_{\overline{\overline{\Pi}}}$ à la sous-catégorie pleine $kl(\overline{\overline{\Pi}})$ de $Kl(\overline{\overline{\Pi}})$ ayant pour objets les images des objets de $\underline{E}$ par $L'_{\overline{\overline{\Pi}}}$) $L_{\overline{\overline{\Pi}}} : \underline{E} \longrightarrow kl(\overline{\overline{\Pi}})$, identifiant $\underline{E} = E^{\Pi}$ à une sous-catégorie de $kl(\overline{\overline{\Pi}})$ ayant les mêmes objets que $kl(\overline{\overline{\Pi}})$.

2.2. Les diverses situations précédentes sont convenablement décrites, en toute généralité, par l'un des procédés qui suit:

1. On dispose d'une co-catégorie interne à PR$\underline{O}$TO :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} : P = P_1 \arrow[r, bend left, "\overline{a}'"] \arrow[r, bend right, "\overline{b}'"'] & P_2 \arrow[l, "\overline{i}'"'] \arrow[r, "\overline{k}'"] & P_3 \arrow[r, bend left, "\overline{k}'_1"] \arrow[r, bend right, "\overline{k}'_2"'] & P_4
\end{tikzcd}$$

et $J' : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C} \boxtimes P$ est un co-foncteur interne à PR$\underline{O}$TO , identique sur les objets des co-objets.

Alors $$E^{P} \sim (\mathbb{C} \boxtimes P, E) \xrightarrow[\mathrm{Hom}(J', E) = (J', E)]{} \mathrm{Hom}(\mathbb{P}, E) = (\mathbb{P}, E) = \overline{E^{P}}$$
est bien un foncteur (ensembliste) identifiant E^{P} à une sous-catégorie de $\overline{E^{P}}$ ayant mêmes objets.

2. On dispose d'une catégorie interne à PR$\underline{O}$TO :

$$\mathbb{E} : \begin{tikzcd} E = E_1 \arrow[r, "\bar{i}"] & E_2 \arrow[l, bend right=60, "\bar{a}"'] \arrow[l, bend left=60, "\bar{b}"] & E_3 \arrow[l, "\bar{k}"'] & E_4 \arrow[l, bend right=60, "\bar{k}_1"'] \arrow[l, bend left=60, "\bar{k}_2"] \end{tikzcd}$$

et $\mathbb{J} : /\mathbb{C},E/ \longrightarrow \mathbb{E}$ est un foncteur interne à PROTO , identique sur les objets des objets.

Alors $E^P \sim (P,/\mathbb{C},E/) \xrightarrow[\mathrm{Hom}(P,\mathbb{J}) = (P,\mathbb{J})]{} \mathrm{Hom}(P,\mathbb{E}) = (P,\mathbb{E}) = \overline{E^P}$

est bien un foncteur (ensembliste) identifiant E^P à une sous-catégorie de $\overline{E^P}$ ayant les mêmes objets.

3. Les hypothèses de 1. et 2. sont simultanément vérifiées et, de plus, le foncteur interne $\mathbb{J}$ et le co-foncteur interne $\mathbb{J}'$ sont conjugués; autrement dit, il existe un isomorphisme de catégories (ensemblistes) rendant commutatif le diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (\mathbb{C} \boxtimes P,E) \arrow[dr, "{(\mathbb{J}',E)}"'] & \dot\sim \; E^P \sim & (P,/\mathbb{C},E/) \arrow[dl, "{(P,\mathbb{J})}"] \\ & (\mathbb{P},E) \sim (P,\mathbb{E}) & \end{tikzcd} .$$

Alors, on dispose aussi d'une catégorie double (ensembliste) $\mathrm{Hom}(\mathbb{P},\mathbb{E}) = (\mathbb{P},\mathbb{E})$, dont les deux catégories sous-jacentes sont isomorphes, et d'un foncteur double (ensembliste) injectif (et bijectif sur les "bords"):

$$\square E^P \sim (\mathbb{C} \boxtimes P,/\mathbb{C},E/) \xrightarrow[\mathrm{Hom}(\mathbb{J}',\mathbb{J}) = (\mathbb{J}',\mathbb{J})]{} (\mathbb{P},\mathbb{E}) ,$$

où $\square E^{P}$ est la catégorie double des carrés commutatifs (appelés quatuors dans (C.A.S.T.)) de E^{P}.

Dans les trois cas qui précedent, les morphismes des catégories $(\mathbb{P},E)$ ou $(P,\mathbb{E})$ seront appelés <u>morphismes souples</u> entre structures internes à E décrites par P.

3. <u>Rigidification des morphismes souples</u>.

3.1. Soit $\underline{K}$ une sous-catégorie de $\overline{\underline{K}}$ ayant les mêmes objets.

<u>Définition</u>. Nous dirons que $\overline{\underline{K}}$ <u>représentable</u> (resp. <u>co-représentable</u>) dans $\underline{K}$ si, et seulement si, le foncteur injection canonique $U: \underline{K} \longrightarrow \overline{\underline{K}}$ admet un adjoint à droite (resp. à gauche) U_* (resp. U^*).

Si $\overline{\underline{K}}$ est représentable (resp. co-représentable) dans $\underline{K}$, l'adjonction $U \dashv U_*$ (resp. $U^* \dashv U$) induit un triple (resp. un co-triple) sur $\underline{K}$ que nous notons $\mathbb{T}$ (resp. $\mathbb{T}'$) et dont l'endofoncteur sous-jacent sera noté $T: \underline{K} \longrightarrow \underline{K}$ (resp. $T': \underline{K} \longrightarrow \underline{K}$). Dans ce cas, il est clair que l'on a, naturellement en tous objets K' et K de $\underline{K}$:

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\underline{K}}}(K',K) \sim \mathrm{Hom}_{\underline{K}}(K',TK)$$

$$\text{(resp.} \qquad \mathrm{Hom}_{\overline{\underline{K}}}(K',K) \sim \mathrm{Hom}_{\underline{K}}(T'K',K) \qquad).$$

Il est tout aussi clair que $\overline{\underline{K}}$ est isomorphe à la catégorie de Kleisli $Kl(\mathbb{T})$ (resp. $Kl(\mathbb{T}')$) du triple (resp. du co-triple) $\mathbb{T}$ (resp. $\mathbb{T}'$).

3.2. Soit E un objet de $\underline{PROTO}$ et

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & A' & \\ B' \arrow[ur] & & C' \arrow[ul] \\ & D' \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

un carré commutatif dans PROTO .

Définition. Nous dirons que (*) est une E-somme fibrée si, et seulement si, le carré

$$(*,E) \qquad \begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \mathrm{Hom}(A',E) = (A',E) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Hom}(B',E) = (B',E) \arrow[dr] & & (C',E) = \mathrm{Hom}(C',E) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Hom}(D',E) = (D',E) & \end{tikzcd}$$

est un produit fibré ensembliste.

Bien entendu, les sommes fibrées de PROTO sont des E-sommes fibrées pour tout objet E.
Signalons, également, qu'il n'est jamais très difficile, en pratique, de vérifier qu'un carré de PROTO est ou n'est pas une Ens-somme fibrée (par exemple).

Si P est un objet de PROTO , on définit dualement la notion de P-produit fibré dans PROTO .

3.3. Nous supposons, maintenant, que $\mathbb{J}' : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C} \boxtimes P$ est un co-foncteur interne à PROTO , identique sur les objets des co-objets.

<u>Proposition</u>. <u>Si</u> E <u>est un prototype</u>, <u>si</u> $u'_1 : P = P_1 \longrightarrow P$ <u>et</u> $u'_2 : 2 \boxtimes P \longrightarrow P_2$ <u>sont deux morphismes de</u> PROTO <u>tels que</u>:

- $u'_2 . b' = \overline{b}'$,
- <u>le carré</u>

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & P_2 & \\ P = P_1 \arrow[ur, "\overline{a}'"] & & 2 \boxtimes P \arrow[ul, "u'_2"'] \\ & P = P_1 \arrow[ul, "u'_1"] \arrow[ur, "a'"'] & \end{tikzcd}$$

<u>est une</u> <u>E-somme fibrée dans</u> PROTO ,

<u>alors</u>, $\overline{E^{P}} = (\,|P,E)$ <u>est représentable dans</u> E^{P} .

<u>Preuve</u>. A la réalisation $f: P \longrightarrow E$ (qui est donc un objet de $\overline{E^{P}}$) nous associons $U_* f = f . u'_1 : P \longrightarrow E$ (qui est donc un objet de E^{P}).

Pour toute réalisation $g: P \longrightarrow E$, nous avons:

- $\mathrm{Hom}_{\overline{E^{P}}}(f,g) = \left\{ h' : P_2 \longrightarrow E \;/\; h'.\overline{a}' = f \text{ et } h'.\overline{b}' = g \right\}$,

- $\mathrm{Hom}_{E^{P}}(U_* f, g) = \left\{ h : 2 \boxtimes P \longrightarrow E \;/\; h.a' = f.u'_1 \text{ et } h.b' = g \right\}$.

Nous obtenons une première application:

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\overline{E^{P}}}(f,g) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E^{P}}(U_* f, g)$$

$$h' \longmapsto h'.u'_2 \qquad .$$

Si, maintenant, $h \in \mathrm{Hom}_{E^{P}}(U_* f, g)$, le diagramme ci-dessous commute dans $\underline{\text{PROTO}}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & E & \\
P \arrow[ur, "f"] & & 2 \boxtimes P \arrow[ul, "h"'] \\
 & P \arrow[ul, "u'_1"] \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Le carré (*) étant une E-somme fibrée, il existe donc un unique $\Psi(h): P_2 \longrightarrow E$ tel que:

- $\Psi(h).\overline{a}' = f$ et $\Psi(h).u'_2 = h$.

On en déduit une seconde application:

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{E^P}(U_* f, g) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{E}^P}(f,g) \quad .$$

Bien entendu , les applications φ et Ψ sont inverses l'une de l'autre, ce qui permet de conclure. //

Exemple. Il est facile d'exhiber un co-foncteur $J': \mathbb{P}_{cat} \longrightarrow \mathbb{C} \boxtimes P_{cat}$ interne à $\underline{\text{PROTO}}$, identique sur les objets des co-objets, vérifiant les conditions de la proposition précédente et tel que $(\mathbb{P}_{cat}, \mathrm{Ens})$ soit équivalente à la catégorie $\overline{\underline{\text{Cat}}}$ du n° 2.1 , exemple 1 .

En conséquence, $\overline{\underline{\text{Cat}}}$ est représentable dans $\underline{\text{Cat}}$, ce qui n'est évidemment pas fait pour surprendre !

3. 4. Nous supposons encore que $J': \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C} \boxtimes P$ est un co-foncteur interne à $\underline{\text{PROTO}}$, identique sur les objets des co-objets.

Proposition. *Si $P = P_1$ est une catégorie petite, si α est un ordinal régulier, si le prototype P est obtenu en ne distinguant que des limites projectives α-petites et s'il existe dans PROTO (trivialement considérée comme une 2-catégorie) un carré co-comma:*

$$(**)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & P_2 & \\ P = P_1 \arrow[ur, "\overline{a}'"] \arrow[rr, phantom, "\overset{n}{\Longrightarrow}"] & & P_1 = P \arrow[ul, "\overline{b}'"'] \\ & P_0 \arrow[ul, "c"] \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}$$

où $\underline{P}_0$ est une catégorie petite (*dans ce* cas, $\underline{P}_2$ *a la forme d'un "flot" de flèches de sources dans* $\overline{a}'(\underline{P})$ *et de buts dans* $\overline{b}'(\underline{P})$), *alors, la catégorie* $\overline{\mathrm{Ens}^{P}} = (\mathbb{P},\mathrm{Ens})$ *est co-représentable dans* Ens^{P}.

Preuve. Soit $f\colon P \longrightarrow \mathrm{Ens}$ une réalisation (i. e. un objet de $\overline{\mathrm{Ens}^{P}}$). Nous lui associons le foncteur $\mathrm{ext}_d(f.c)\colon \underline{P} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$, extension de Kan inductive du foncteur $f.c\colon \underline{P}_0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ le long du foncteur $d\colon \underline{P}_0 \longrightarrow \underline{P}$ (elle existe car $\underline{P}$ et $\underline{P}_0$ sont petites et $\underline{\mathrm{Ens}}$ est à limites inductives petites). Nous faisons ensuite correspondre au foncteur (i. e. au préfaisceau) $\mathrm{ext}_d(f.c)$ son faisceau associé, c'est-à-dire une réalisation $U^*f\colon P \longrightarrow \mathrm{Ens}$ (ce faisceau existe car $\underline{P}$ est petite et les seules limites projectives qui y sont distinguées sont α-petites). On vérifie facilement, en utilisant le carré co-comma (**), que $U^*f\colon P \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est bien un objet de Ens^P, libre sur l'objet $f\colon P \longrightarrow \mathrm{Ens}$

de $\overline{Ens}^{P}$, pour le foncteur

$$U : Ens^{P} \sim (\mathbb{C} \boxtimes P, Ens) \xrightarrow[(J',Ens)]{} (\mathbb{P},Ens) .$$

D'où la conclusion. //

<u>Exemple</u>. On sait exhiber un co-foncteur:

$$J' : \mathbb{P}_{2\text{-cat}} \longrightarrow \mathbb{C} \boxtimes P_{2\text{-cat}} ,$$

interne à PROTO , identique sur les objets des co-objets, vérifiant les conditions de la proposition précédente et tel que la catégorie $(\mathbb{P}_{2\text{-cat}},Ens)$ soit équivalente à la catégorie $\overline{2\text{-}Cat}$ du n° 2.1 , exemple 2 .

En conséquence, la catégorie $\overline{2\text{-}Cat}$ est co-représentable dans 2-Cat . On retrouve ainsi, très facilement, un résultat connu. La construction explicite du 2-foncteur "co-représentant" un lax-2-foncteur, décrite antérieurement en (L.V.D.B.), correspond à celle que fournit, a posteriori, la démonstration de la proposition précédente.

<u>Remarque</u>. Dans la proposition qui précède, on peut remplacer Ens par n'importe quel prototype E obtenu en distinguant toutes les limites projectives α-petites dans une catégorie E possédant toutes ces limites, toutes les limites inductives petites et où les limites inductives α-filtrantes commutent aux limites projectives α-petites (ce qui assure l'existence du "faisceau associé").

3.5. Supposons, dualement, que $J : /\mathbb{C},E/ \longrightarrow \mathbb{E}$ est un foncteur interne à PROTO , identique sur les objets des objets.

<u>Proposition</u>. <u>Si</u> P <u>est un prototype</u>, <u>si</u> $u_1 : E = E_1 \longrightarrow E$ <u>et</u> $u_2 : E_2 \longrightarrow /2,E/$ <u>sont deux morphismes de</u> PROTO <u>tels que</u>:

- $b.u_2 = \overline{b}$,

- <u>le carré</u>

$$(*)^{op} \qquad \begin{tikzcd} & E_2 \arrow[dl, "\bar{a}"'] \arrow[dr, "u_2"] & \\ E = E_1 \arrow[dr, "u_1"'] & & /2,E/ \arrow[dl, "a"] \\ & E_1 = E & \end{tikzcd}$$

<u>est un</u> P-<u>produit fibré</u>,

<u>alors</u>, <u>la catégorie</u> $\overline{E^{P}} = (P, \mathbb{E})$ <u>est représentable dans</u> E^{P} .

<u>Preuve</u>. Elle est évidemment duale de celle de la proposition de 3.3 . //

<u>Exemple</u> 1. Si $\underline{\mathbb{E}}'$ est une 2-catégorie représentable, la catégorie double $\underline{\mathbb{E}}$ de ses quintettes (i. e. de ses "2-carrés") est représentable (au sens de (M.U.F.U.)). Si, de plus, la catégorie $\underline{E}$ des 1-morphismes de $\underline{E}'$ a suffisamment de limites, la catégorie double $\underline{\mathbb{E}}$ est sous-jacente à une catégorie $\mathbb{E}$, interne à PROTO et vérifiant les conditions de la proposition précédente pour tout prototype projectif P .

Dans ce cas, la catégorie $\overline{E^{P_{cat}}} = (P_{cat}, \mathbb{E})$ (des lax-foncteurs internes entre catégories internes à $\underline{E}$) est représentable dans la catégorie $E^{P_{cat}}$ (des foncteurs internes entre catégories internes à $\underline{E}$).

<u>Exemple</u> 2. Reprenons les hypothèses et les notations de l'exemple 3 du n° 2.1 et désignons par E_2 la catégorie ayant pour objets les morphismes de $kl(\overline{\mathbb{T}})$ et pour morphismes $q: r \longrightarrow r'$ les carrés commutatifs de $kl(\overline{\mathbb{T}})$ de la forme:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s"'] & \cdot \arrow[d, "s'"] \\ \cdot \arrow[r, "r'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

(où s et s' sont identifiés à des morphismes de $\underline{E}$).
Il est facile de vérifier qu'il existe un $\mathbb{1}$-produit fibré $(*)^{op}$, comme dans la proposition précédente, si et seulement si le foncteur $L_{\overline{\overline{\mathbb{T}}}} : \underline{E} \longrightarrow kl(\overline{\overline{\mathbb{T}}})$ admet un adjoint à droite T (dans ce cas, on a $T.L_{\overline{\overline{\mathbb{T}}}} = u_1 : \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$). Si $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$ est tel que $kl(\overline{\overline{\mathbb{T}}}) = \mathrm{Span}\ \underline{E}$, la condition précédente signifie exactement que $\underline{E}$ est un topos.
Plus généralement, si $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$ est tel que $kl(\overline{\overline{\mathbb{T}}}) = \mathrm{Span}\ \underline{E}$ et s'il existe un P-produit fibré $(*)^{op}$, ceci signifie que E^{P} est muni d'une "monade des parties" $\wp$ telle que l'on ait une bijection, naturelle en tous objets $f,g : P \longrightarrow E$, entre les $R \subset f \times g$ et les $r : f \longrightarrow \wp g$.

Remarques. On pourra comparer la condition de P-produit fibré de la proposition précédente (qui impose qu'une catégorie double est représentable) et la proposition 2 , p. 35 de (T.A.E.P.).
Signalons, également, qu'il existe des situations réelles où $\mathbb{E}$ n'est pas une catégorie interne mais seulement un objet simplicial interne à PROTO pour lequel, pour certains P seulement, $/P, \mathbb{E}/$ est une catégorie (où même une bi-catégorie). Dans ce cas, localisé, une étude analogue est possible, de même que dans le cas dual localisé.
Enfin, nous omettons volontairement d'énoncer la proposition duale de celle du n° 3. 4 : pratiquement, elle n'a pas grand sens

car on ne dispose que très exceptionnellement du "faisceau co-associé".

3.6. Supposons, pour conclure, que $\mathbb{J}' : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C} \otimes P$ est un co-foncteur interne à PROTO, identique sur les objets des co-objets, vérifiant les conditions de la proposition du n° 3.4, que $\mathbb{J} : /\mathbb{C},E/ \longrightarrow \mathbb{E}$ est un foncteur interne à PROTO, identique sur les objets des objets, vérifiant les conditions de la proposition du n° 3.5 et, enfin, que $\mathbb{J}$ et $\mathbb{J}'$ sont conjugués.

Nous disposons donc:

- d'un co-triple $\mathbb{T}'$ et d'un triple $\mathbb{T}$ sur E^P tels que:

$$Kl(\mathbb{T}') \sim (\mathbb{P},E) \sim (P,\mathbb{E}) \sim Kl(\mathbb{T}) ,$$

- de la catégorie double (ensembliste) $(\mathbb{P},\mathbb{E})$.

Il est facile d'établir que:

Proposition. La catégorie double $(\mathbb{P},\mathbb{E})$ est isomorphe à la catégorie double des carrés commutatifs de l'une quelconque des catégories $Kl(\mathbb{T}')$, $(\mathbb{P},E)$, $(P,\mathbb{E})$ et $Kl(\mathbb{T})$. De plus, elle est aussi isomorphe à la catégorie double (que l'on décrit aisément) des carrés commutatifs de E^P de la forme

$$\begin{array}{ccc} T'f' & \longrightarrow & f_1 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ f_2 & \longrightarrow & Tf'' \end{array} .$$

Bibliographie.

(A.O.F.S.) F. E. J. Linton, An Outline of Functorial Semantics, Lecture Notes in Math. 80, Springer, 1969.

(C.A.S.T.) C. Ehresmann, Catégories et Structures, Dunod, Paris, 1965.

(E.G.C.E.) C. Lair, Etude Générale de la Catégorie des Esquisses, Esquisses Math. 23, Paris, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et Types de Structures Algébriques, Bul. Instit. Polit., Iasi, XIV, 1968 .

(L.V.D.B.) L. van den Bril, exposé au Séminaire Guitart-Lair-Coppey-Foltz, multigraphié, Paris, 1980.

(M.U.F.U.) A. et C. Ehresmann, Multiple Functors II, Cah. de Top. et Géom. Diff. , XIX,3 , 1978.

(T.A.E.P.) L. Coppey, Théories Algébriques et Extensions de préfaisceaux, Cah. de Top. et Géom. Diff. , XIII,1 , 1972.

785