Diagrammes, Vol. 6 , Paris 1981.

EXISTENCE DE DIAGRAMMES LOCALEMENT LIBRES[+]

R. Guitart et C. Lair

0. Nous rappellerons comment les catégories esquissables (de C. Ehresmann) contiennent en particulier les catégories localement présentables (de Gabriel et Ulmer) et les catégories localisables (de Diers). Nous énoncerons, dans ce cadre général, un théorème d'existence de petits diagrammes localement libres (analogue "dans le cas non discret" du théorème d'existence de petites familles localement libres de Diers généralisant le théorème du faisceau associé). Nous en fournissons une preuve entièrement nouvelle, différente de celle de (5) (pp. 45 à 55), à laquelle nous la comparerons: elle nous semble plus adaptée au concept de formule interne que nous présentons également.
Pour plus ou d'autres détails, on pourra consulter utilement (5) ou le texte de la conférence de R. Guitart (voir (4)) au 19th Peripatetic Seminar on Sheaves and Logic qui en résume les principaux résultats et en présente les différents points de vue.

[+] Ce texte a fait l'objet d'un exposé de R. Guitart à l'International Conference on Category Theory de Gummersbach (5-10 Juillet 1981).

1. On dit (voir (3)) que $/\underline{S}/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ est une *esquisse projective* si $\underline{S}$ est une catégorie petite et $\mathbb{P}$ est un ensemble de limites projectives petites, dites *distinguées*, dans $\underline{S}$. Alors, une *réalisation* ou *modèle* de $/\underline{S}/$ est un foncteur

$$G : \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

transformant tout élément de $\mathbb{P}$ **en une limite** projective de Ens . A $/\underline{S}/$ est associée la catégorie $\mathrm{Mod}/\underline{S}/$, sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonc}(\underline{S},\mathrm{Ens})$ ayant pour objets ces réalisations. Dans ces conditions, on dispose d'une restriction

$$Y : \underline{S}^{op} \longrightarrow \mathrm{Mod}/\underline{S}/$$

du plongement de Yoneda et l'on sait ("théorème du faisceau associé") que le foncteur injection canonique

$$\mathrm{Mod}/\underline{S}/ \longrightarrow \mathrm{Fonc}(\underline{S},\mathrm{Ens})$$

possède un adjoint à gauche.

On dit qu'une catégorie localement petite est *naturellement projectivement esquissable* si elle est équivalente à une catégorie de la forme $\mathrm{Mod}/\underline{S}/$. Ainsi, les catégories naturellement projectivement esquissables sont *exactement* les catégories localement présentables au sens de (8).

Plus généralement, une catégorie localement petite est dite *projectivement esquissable* (voir (6)) s'il existe une co-catégorie interne $/\underline{\mathbb{S}}/$ dans la catégorie des esquisses projectives telle que $\mathrm{Hom}(/\underline{\mathbb{S}}/,\mathrm{Ens})$ lui soit équivalente (le cas "naturel" correspondant à la co-catégorie $\underline{2} \otimes /\underline{S}/$ déduite de la structure de co-catégorie canonique sur $\underline{2}$). Par exemple, la catégorie Cat' dont les objets sont les petites catégories et dont les morphismes sont les *tranformations naturelles* est projectivement esquissable.

2. Appelons maintenant (voir (3)) <u>esquisse</u> (<u>mixte</u>) tout $//\underline{S}// = (\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ où $/\underline{S}/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ est une esquisse projective, dite <u>sous-jacente à</u> $//\underline{S}//$, et Π est un ensemble de limites inductives petites distinguées dans $\underline{S}$. On définit facilement (par analogie avec le §1) les <u>réalisations</u> ou <u>modèles</u> de $//\underline{S}//$, la catégorie $\mathrm{Mod}//\underline{S}//$ de ces modèles (sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}/\underline{S}/$ donc de $\mathrm{Fonc}(\underline{S},\mathrm{Ens})$), les catégories <u>naturellement esquissables</u> et les catégories (seulement) <u>esquissables</u>.

Par exemple, on montre en (5) que les catégories localisables de (2) sont <u>exactement</u> les catégories naturellement esquissables par une $//\underline{S}//$ où Π est un ensemble de sommes. De même, on prouve en (7) que sont esquissables les catégories co-fibrées scindées sur Ens, les catégories de modèles de théories du 1er ordre ainsi que les catégories de modèles de sites.

3. Appelons <u>esquisse concrète</u> tout couple $(/\underline{S}/, \mathbb{F})$ constitué d'une esquisse projective $/\underline{S}/$ et d'un ensemble $\mathbb{F}$ de <u>cônes</u> projectifs petits distingués dans $\mathrm{Mod}/\underline{S}/$. On appelle <u>modèle</u> de $(/\underline{S}/, \mathbb{F})$ tout mofèle F de $/\underline{S}/$ qui vérifie:

$$\mathrm{Hom}(L,G) = \varinjlim_{I\in \underline{I}} \mathrm{Hom}(L_I,G)$$

pour tout cône projectif $(L \longrightarrow L_I)_{I\in\underline{I}^{op}}$ appartenant à $\mathbb{F}$. On note alors $\mathrm{Mod}(/\underline{S}/, \mathbb{F})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}/\underline{S}/$ dont les objets sont les modèles de cette esquisse concrète.

A toute esquisse $//\underline{S}// = (\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ on peut associer l'esquisse concrète $(/\underline{S}/, Y(\Pi))$ et il est facile de vérifier que $\mathrm{Mod}//\underline{S}// = \mathrm{Mod}(/\underline{S}/, Y(\Pi))$. Inversement, on montre en (5) qu'à toute esquisse concrète $(/\underline{S}/, \mathbb{F})$ est associée une esquisse mixte $//\underline{S}'//$ telle que $\mathrm{Mod}//\underline{S}'//$ et $\mathrm{Mod}(/\underline{S}/, \mathbb{F})$ soient équivalentes. Autrement dit, on établit que le point de vue concret (permettant la construction systématique d'esquisses mixtes) et le point de vue abstrait sont équivalents,

Par exemple, si $/\underline{S}/$ est une esquisse projective d'anneau unitaire commutatif et si $\mathbb{F}$ a pour unique élément le cône projectif (de la catégorie des anneaux unitaires commutatifs)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longleftarrow & \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[X,Y]/XY-1 \\ 0 & \longleftarrow\!\shortmid & X & \longmapsto & X \end{array}$$

alors $\mathrm{Mod}(/\underline{S}/, \mathbb{F})$ est la catégorie des corps commutatifs. Ceci permet une construction explicite d'une esquisse $//\underline{S}'//$ de corps commutatifs. Cependant il est équivalent d'esquisser "abstraitement" les corps commutatifs en "complétant" l'esquisse projective $/\underline{S}/$ d'anneau unitaire commutatif en l'esquisse mixte

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & & & \\ S^{*} \arrow[r, "(-)^{-1}"'] & S^{*} \arrow[r] & 1 + S^{*} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & S & S \times S \arrow[l, shift right, "\times"'] \arrow[l, shift left, "+"] \end{tikzcd}$$

4. Soit $\underline{H}$ une catégorie localement petite et $\mathbb{F}$ un ensemble de cônes projectifs petits distingués dans $\underline{H}$. On dit d'un objet H de $\underline{H}$ qu'il <u>valide</u> $\mathbb{F}$ si l'on a

$$\mathrm{Hom}(L,H) = \varinjlim_{I \in \underline{I}} \mathrm{Hom}(L_I,H)$$

pour tout cône projectif $(L \longrightarrow L_I)_{I \in \underline{I}^{op}}$ appartenant à $\mathbb{F}$. On définit la sous-catégorie pleine $\mathrm{Val}(\mathbb{F})$ de $\underline{H}$ dont les objets sont ceux qui valident $\mathbb{F}$.

En (5) on montre que ce point de vue est équivalent à celui de Andréka-Németi développé en (1). Ainsi, il est légitime d'appeler les éléments de $\mathbb{F}$ des <u>formules internes à</u> $\underline{H}$. D'autre part, les considérations du §3 montrent que:

- si $//\underline{S}// = (\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ est une esquisse mixte, alors on a $\mathrm{Mod}\,//\underline{S}// = \mathrm{Val}(Y(\Pi))$ (en prenant $\underline{H} = \mathrm{Mod}/\underline{S}/$),
- si $(/\underline{S}/, \mathbb{F})$ est une esquisse concrète, on a l'égalité $\mathrm{Mod}(/\underline{S}/, \mathbb{F}) = \mathrm{Val}(\mathbb{F})$ (en prenant, de nouveau, $\underline{H} = \mathrm{Mod}/\underline{S}/$).

Autrement dit, les limites inductives distinguées dans une esquisse mixte $//\underline{S}//$ sont (à une dualité près) des formules internes à $/\underline{S}/$ (ou $\mathrm{Mod}/\underline{S}/$), i. e. des formules "exprimables dans le langage décrit par $/\underline{S}/$ ". De même, les cônes projectifs distingués d'une esquisse concrète $(/\underline{S}/, \mathbb{F})$ sont des formules internes (concrètes) exprimables dans le langage de $/\underline{S}/$.

5. Etablissons maintenant en toute généralité le théorème d'existence de petits diagrammes localement libres sui suit

<u>Théorème 1. Si</u> $\underline{H}$ <u>est une catégorie localement petite à petites limites inductives, si</u> α <u>est un ordinal régulier, si</u> $\mathbb{F}$ <u>est un ensemble de cônes projectifs petits distingués dans</u> $\underline{H}$ <u>dont les objets de base et les sommets sont</u> α<u>-présentables et dont les projections sont des épimorphismes, alors tout objet</u> H <u>de</u> $\underline{H}$ <u>définit un petit diagramme</u>

$$D(H) : V(H) \longrightarrow \mathrm{Val}(\mathbb{F})$$

<u>tel que, naturellement en tout objet</u> K <u>de</u> $\mathrm{Val}(\mathbb{F})$, <u>on ait:</u>

$$\mathrm{Hom}(H,K) = \underrightarrow{\lim}\ \mathrm{Hom}(D(H)(-),K)$$

($D(H)$ s'appelle alors un <u>petit diagramme localement libre sur</u> H <u>dans</u> $\mathrm{Val}(\mathbb{F})$).

<u>Preuve</u>. Nous supposerons (pour simplifier) que $\mathbb{F}$ ne contient qu'un cône projectif petit $(s_I : L \longrightarrow L_I)_{I \in \underline{I}^{op}}$ (le cas général se traitant par analogie évidente).

a). Si $\mathrm{Hom}(L,H) = \emptyset$, il est clair que $\{H\} \longrightarrow \mathrm{Val}(\mathbb{F})$ est localement libre sur H .

b). Supposons $\mathrm{Hom}(L,H) \neq \emptyset$ et, pour tout $f : L \longrightarrow H$, notons $B(f)$ l'ensemble des objets I de $\underline{I}$ tels qu'il existe $f_I : L_I \longrightarrow H$ vérifiant $f_I . s_I = f$ (alors, I étant fixé, f_I est unique puisque s_I est épi).
S'il existe un tel f pour lequel les éléments de $B(f)$ ne sont pas tous dans une même composante connexe de $\underline{I}$, il est clair que $\emptyset \longrightarrow \mathrm{Val}(\mathbb{F})$ est alors localement libre sur H .

c). Supposons que $\mathrm{Hom}(L,H) \neq \emptyset$ et que, pour tout $f : L \longrightarrow H$, l'ensemble $B(f)$ est constitué d'objets d'une même composante connexe de $\underline{I}$.
Posons $H_0 = H$ et construisons un objet H_1 de $\underline{H}$ comme suit:

- pour tout $f : L \longrightarrow H$, on choisit une sous-catégorie non vide et connexe $\underline{I}_1(f)$ de $\underline{I}$ contenant $B(f)$,
- H_1 est la limite inductive dans $\underline{H}$ représentée par

$$\begin{tikzcd}
H = H_0 \arrow[dr, "h_{1,0}"'] & L'(f,I) \arrow[l, "g(f,I)"'] \arrow[r, "s(f,I)"] & L(f,I) \arrow[dl] \\
& H_1 &
\end{tikzcd}$$

où $g(f,I) = f$, $s(f,i) = s_I$ et les couples (f,I) sont tels que $f : L \longrightarrow H$ et I est objet de $\underline{I}_1(f)$.
De même, pour tout ordinal $\lambda+1 < \alpha$, on conctruit un

$$h_{\lambda+1,\lambda} : H_\lambda \longrightarrow H_{\lambda+1}$$

à partir de H_λ .
Enfin, pour tout ordinal limite $\lambda \leq \alpha$, on pose:

$$H_\lambda = \varinjlim_{\lambda' < \lambda} H_{\lambda'}$$

et l'on note $h_{\lambda,\lambda'} : H_{\lambda'} \longrightarrow H_\lambda$ les co-projections. En particulier, ceci définit <u>des</u> $h_{\alpha,0} : H_0 \longrightarrow H_\alpha$ (relatifs aux différents processus de choix de sous-catégories connexes non vides de $\underline{I}$).Comme ces sous-catégories se comparent (par inclusion), il en résulte un diagramme de "comparaisons" $V(H)$ <u>petit</u> (le nombre de choix possibles étant petit) entre les H_α .

d). Reprenons les hypothèses et notations de c) et montrons que les H_α sont objets de $Val(\mathbb{F})$, autrement dit que chaque H_α valide le cône projectif qui est élément de $\mathbb{F}$.
Supposons que $g: L \longrightarrow H_\alpha$. Comme H_α est limite inductive α-filtrante des H_λ (où $\lambda < \alpha$) et L est α-présentable, il existe un $\lambda < \alpha$ et une $g_\lambda : L \longrightarrow H_\lambda$ tels que $h_{\alpha,\lambda} \cdot g_\lambda = g$. Par construction, il existe donc un choix $\underline{I}_{\lambda+1}(g_\lambda) \supset B(g_\lambda)$, un indice I de $\underline{I}_{\lambda+1}(g_\lambda)$ et une (co-projection) $g_{\lambda+1}: L_I \longrightarrow H_{\lambda+1}$ tels que $h_{\lambda+1,\lambda} \cdot g_\lambda = g_{\lambda+1} \cdot s_I$. D'où l'on déduit que g factorise bien au travers d'un s_I .
Supposons, maintenant, que g possède une autre factorisation $g': L_{I'} \longrightarrow H_\alpha$, i. e. que $g' . s_{I'} = g$. Comme $L_{I'}$ est également α-présentable, il existe $\lambda' < \alpha$ et une flèche $g'_{\lambda'} : L_{I'} \longrightarrow H_{\lambda'}$ tels que $h_{\alpha,\lambda'} \cdot g'_{\lambda'} = g'$. Il existe donc un $\lambda , \lambda' \leq \mu < \alpha$ tel que

$$h_{\mu,\lambda+1} \cdot g_{\lambda+1} \cdot s_I = h_{\mu,\lambda'} \cdot g'_{\lambda'} \cdot s_{I'} \quad (= h) .$$

On en déduit que I et I' sont éléments de $B(h)$ et, par construction, qu'ils sont connectés dans $\underline{I}_{\mu+1}(h)$, de même que

$h_{\mu+1,\mu}.h_{\mu,\lambda}.g_{\lambda+1}$ et $h_{\mu+1,\mu}.h_{\mu,\lambda'}.g'_{\lambda'}$. Par conséquent, en composant par $h_{\alpha,\mu+1}$, il en résulte une connexion entre les deux décompositions g' et $h_{\alpha,\mu+1}.g_{\lambda+1}$ de g.
Nous venons donc d'établir que l'on dispose bien d'un petit diagramme $D(H)\colon V(H) \longrightarrow Val(\mathbb{F})$.

e). Reprenons les hypothèses et notations de c) et d) et établissons que $D(H)$ est bien localement libre sur H.
Pour ce faire, supposons que K est objet de $Val(\mathbb{F})$ et que $k\colon H \longrightarrow K$ est une flèche de $\underline{H}$.
Pour tout $f\colon L \longrightarrow H$, choisissons pour $\underrightarrow{I}_1(f)$ la sous-catégorie de $\underline{I}$ dont les objets sont les I tels que $k.f$ factorise (et alors ce sera de manière unique) par s_I et dont les morphismes permettent de connecter ces factorisations. Comme K valide $\mathbb{F}$, cette sous-catégorie est certainement non vide, connexe et contient $B(f)$. En réitérant, on détermine une procédure de choix de $\underrightarrow{I}_\lambda(g)$ ou encore de construction de H_λ (pour $\lambda \leq \alpha$). Comme chaque H_λ est une limite inductive, il en résulte des $k_\lambda : H_\lambda \longrightarrow K$ (uniques) tels que $k_\lambda.h_{\lambda,0} = k$. En particulier, on a une factorisation $k = k_\alpha.h_{\alpha,0}$.
Si $k = k'_\alpha.h'_{\alpha,0}$ est une autre factorisation, où $h'_{\alpha,0}\colon H_0 \longrightarrow H'_\alpha$, il existe nécessairement une comparaison (i. e. une "inclusion"), à chaque étape $\lambda < \alpha$, entre les choix $\underrightarrow{I}_\lambda(g)$ conduisant à H_α et les choix $\underrightarrow{I}'_\lambda(g)$ conduisant à H'_α. Il en résulte une comparaison (i. e. une flèche de $V(H)$) $v\colon H'_\alpha \longrightarrow H_\alpha$ telle que $k_\alpha.v = k'_\alpha$ et $v.h'_{\alpha,0} = h_{\alpha,0}$.
Le théorème 1 est donc démontré.

6. Remarquons que, si on suppose que les éléments de $\mathbb{F}$ sont des cônes projectifs petits à <u>bases discrètes</u>, alors les

constructions précédentes prouvent que le diagramme localement libre $D(H): V(H) \longrightarrow Val(\mathbb{F})$ est discret (i. e. que $V(H)$ est discrète). Dans ce cas, on obtient un critère d'existence de petites familles localement libres ou encore d'un multi-adjoint à gauche au foncteur d'inclusion $Val(\mathbb{F}) \longrightarrow H$ (voir (2)).

Remarquons également qu'une adaptation immédiate de la preuve du théorème 1 (prendre des $\underline{I}(g)$ qui sont des catégories connexes non vides co-fibrées scindées sur des sous-catégories connexes de $\underline{I}$ et dont les fibres sont de cardinal inférieur à un cardinal c fixé) permet de substituer à l'hypothèse que les projections des cônes projectifs de $\mathbb{F}$ sont des épis celle, plus générale, où ces projections s_I sont des c-épis (c'est-à-dire si l'on a, pour tout objet H de $\underline{H}$ et toute flèche $f: L \longrightarrow H$, $Card(Hom(s_I,H)^{-1}(f)) \leq c$).

7. Du théorème 1 nous déduisons le théorème qui suit.

Théorème 2. Si $//\underline{S}// = (\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ (resp. $(/\underline{S}/, \mathbb{F})$) est une esquisse mixte (resp. concrète) et si les co-projections (resp. les projections) des limites inductives (resp. des cônes projectifs) de Π (resp. de $\mathbb{F}$) sont des monomorphismes distingués de $\mathbb{P}$ (resp. des épimorphismes), alors tout objet de $Mod/\underline{S}/$ possède un petit diagramme localement libre dans la sous-catégorie $Mod//\underline{S}//$ (resp. dans $Mod(/\underline{S}/, \mathbb{F})$).

Preuve. Dans le cas d'une esquisse mixte $//\underline{S}//$, posons $\underline{H} = Mod//\underline{S}//$ ainsi que $\mathbb{F} = Y(\Pi)$. Nous savons, d'après les §§2, 3 et 4 , que $Mod//\underline{S}// = Val(Y(\Pi))$. D'autre part, les images par Y de monos de $\underline{S}$ appartenant à $\mathbb{P}$ sont des épis. Enfin, si α désigne un ordinal régulier majorant la famille des cardinaux des bases des limites projectives appartenant à $\mathbb{P}$, on sait

que, pour tout objet S de $\underline{S}$, son image Y(S) est α-présentable. Le Théorème 1 s'applique donc.
Dans le cas d'une esquisse concrète $(/\underline{S}/, \mathbb{F})$, posons $\underline{H} = \mathrm{Mod}/\underline{S}/$. On sait, en vertu des §§3 et 4, que $\mathrm{Val}(\mathbb{F}) = \mathrm{Mod}(/\underline{S}/, \mathbb{F})$. D'autre part, Y est dense : tout objet G de $\mathrm{Mod}/\underline{S}/$ est limite inductive petite <u>canonique</u> "d'objets Y(S)" ; on peut donc trouver un ordinal régulier α qui majore la famille (petite) des cardinaux des bases des seules limites inductives canoniques associées à tous les objets des cônes projectifs de $\mathbb{F}$. Ces objets sont alors α-présentables. Le Théorème 1 s'applique de nouveau.

8. On peut évidemment particulariser le Théorème 2 comme on l'a fait au §7 pour le Théorème 1. On obtient un théorème d'existence de petites <u>familles</u> localement libres pour les esquisses mixtes (resp. concrètes) $//\underline{S}//$ (resp. $(/\underline{S}/, \mathbb{F})$) où Π (resp. $\mathbb{F}$) est un ensemble de <u>sommes</u> (resp. de cônes projectifs à bases <u>discrètes</u>). Ceci justifie l'affirmation du §2 concernant les catégories localisables.

On peut aussi généraliser le Théorème 2 comme on l'a fait au §7 pour le Théorème 1: nous laissons ce soin au lecteur.

Enfin, nous invitons à appliquer le Théorème 2 au foncteur inclusion de la catégorie des anneaux unitaires commutatifs de caractéristiques différentes de 0 dans celle des anneaux unitaires commutatifs (le présenter sous la forme $\mathrm{Mod}//\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Mod}/\underline{S}/$ ou $\mathrm{Mod}(/\underline{S}/, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{Mod}/\underline{S}/$ de sorte que les hypothèses du Théorème 2 soient satisfaites).

9. En (5) nous donnons une autre démonstration du Théorème 2.

On commence par montrer que toute flèche $n: F \longrightarrow G$ de $Mod/\underline{S}/$ de but dans $Mod//\underline{S}//$ engendre un petit diagramme de sous-objets ("images relatives de n") de G dans $Mod//\underline{S}//$.

Pour établir ce premier point, on procède comme suit:

a). On note $H(G)$ la catégorie co-fibrée scindée associée à $G: \underline{S} \longrightarrow Ens$ (ses objets sont les (x,S) tels que x appartienne à $G(S)$ et ses morphismes sont les

$$((x,S),s,(x',S')): (x,S) \longrightarrow (x',S')$$

tels que $s: S \longrightarrow S'$ dans $\underline{S}$ et $G(s)(x) = x'$).

On note $H(F')$ celle associée au foncteur $F': \underline{S} \longrightarrow Ens$ image "point par point" de n .

b). Il s'agit, ensuite, de "compléter" $H(F')$ dans $H(G)$, On procède par récurrence transfinie (indexée par un ordinal régulier α majorant les cardinaux des bases des limites projectives appartenant à $\mathbb{P}$) en posant $H_0(F') = H(F')$ et en construisant $H_{\lambda+1}(F')$ à partir de $H_\lambda(F')$ (pour $\lambda < \alpha$) comme suit:

- pour chaque limite inductive $(s_I: L_I \longrightarrow L)_{I\in \underline{I}}$ appartenant à $\mathbb{I}$, dès que $H_\lambda(F')$ contient un (x,L) , on impose que $H_{\lambda+1}(F')$ contienne des antécédents choisis (qui existent car G est modèle de $//\underline{S}//$) (x_I,L_I) (et des connexions choisies - qui existent pour les mêmes raisons - entre ces antécédents) tels que $G(s_I)(x_I) = x$,
- $H_{\lambda+1}(F')$ contient (x',S') dès que $H_\lambda(F')$ contient un (x,S) et $s: S \longrightarrow S'$ est telle que $G(s)(x) = x'$,
- pour chaque limite projective $(s'_J : L' \longrightarrow L'_J)_{J\in \underline{J}}$ appartenant à $\mathbb{P}$, on impose que $H_{\lambda+1}(F')$ contienne $(x,\overline{L}')$ dès que $H_\lambda(F')$ contient $(G(s'_J)(x),L_J)$ pour tout objet J de $\underline{J}$.

c). Les différents choix possibles à chaque étape $\lambda < \alpha$ et les comparaisons entre ces choix fournissent un petit diagramme de $H_\alpha(F')$ qui sont tous de la forme $H(F_\alpha)$, où $F_\alpha : S \longrightarrow Ens$ est évidemment modèle de $/\!/\underline{S}/\!/$. C'est ce petit diagramme qui est celui des "images relatives" de F par n .

On montre, ensuite, que ces différentes images relatives (quand n varie et F est fixe) sont en quantité petite, ce qui nécessite la construction fastidieuse de graphes formels (dont on établit qu'ils sont en quantité petite) dont les $H_\alpha(F')$ sont tous (quand n varie) des quotients. Le petit diagramme de toutes ces images relatives (quand n varie) est le petit diagramme de $Mod/\!/\underline{S}/\!/$, localement libre sur F , que l'on recherchait.

10. La démonstration du Théorème 2 fournie en (5) et celle du Théorème 1 vue au §5 sont fondées sur des <u>processus de choix non canoniques</u>: c'est ce qui explique qu'on obtient, en général, <u>plusieurs</u> objets "localement libres" et non <u>un</u> objet libre.

Les comparaisons entre des choix <u>différents</u> sont possibles dès que Π n'est pas constituée que de sommes: c'est ce qui explique, en général, qu'il convient de rechercher des petits diagrammes (non nécessairement <u>discrets</u>) localement libres et non des petites <u>familles</u> localement libres.

La démonstration du Théorème 2 donnée en (5) est <u>ensembliste</u> (utilisation des $H(F')$) ou ponctuelle (utilisation de "points" dans la construction formelle signalée au §9). De plus, elle ne peut s'adapter aux hypothèses plus générales du Théorème 1. Par contre, la démonstration du Théorème 1 fournie au §5 n'utilise que des constructions <u>internes</u> à $\underline{H}$ (ou à $Mod/\underline{S}/$). Autrement dit, elle <u>s'exprime dans le langage de</u> $\underline{H}$

(ou de Mod/S/): c'est d'autant plus judicieux qu'elle établit des propriétés relatives à la donnée de ce que nous avons appelé, au §4 , des formules internes.

En définitive, c'est ce point de vue des formules internes et cette méthode de démonstration interne qu'il convient ici de retenir pour essentiels.

11. Bibliographie.

1. H. Andréka et I. Németi, Formulas and ultraproducts in categories, Beit. zur Alg. und Geom. 8 (1979), 133-151.
2. Y. Diers, Catégories localisables, Thèse (Paris 1977).
3. C. Ehresmann, Esquisses et types de structures algébriques, Bull. Instit. Polit. Iaşi, XIV (1968), 1-14.
4. R. Guitart, The theory of sketches (revisited), Journées Faisceaux et Logique (23-24 mai 1981), prépub. Univ. Paris-Nord 23 (juin 1981), 21-28.
5. R. Guitart et C. Lair, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4 (Paris 1980), 1-106.
6. R. Guitart et C. Lair, Critères de rigidification des morphismes souples entre structures internes, Diagrammes 5 (Paris 1981),GL 1-GL 17 .
7. R. Guitart et C. Lair, La continuité pour représenter les formules du 1er ordre, à paraître dans Diagrammes.
8. F. Ulmer, Locally presentable and locally generated categories, Lecture Notes in Math. 195 (1971), 230-247.