Diagrammes, Vol. 6 , 1981 .

CARRES EXACTS ET CARRES DEDUCTIFS (+)

R. Guitart

1. But. En 1978 (voir {4}) j'ai introduit les carrés exacts dans les 2-catégories et montré leur utilité dans le cas spécial de CAT . Depuis, en diverses occasions (voir {6}), j'ai indiqué brièvement pourquoi ces carrés exacts jouent, au niveau de la théorie générale des modèles, le rôle joué par l'équivalence logique " <——> " dans le calcul propositionnel.

Je me propose ici de présenter ensemble les arguments en ce sens, ceux déjà donnés ailleurs et quelques nouveaux. Cela me conduira à isoler un nouveau concept destiné à jouer, au niveau de la théorie générale des modèles, le rôle joué par l'implication logique " ——> " dans le calcul propositionnel: il s'agit du concept de carré déductif. A partir de l'idée de carré déductif, il est très aisé de définir les preuves. Une théorie axiomatique est alors une 2-catégorie où l'on distingue certains chemins-zigzags (les axiomes) et où l'on se donne certains carrés dits déductifs (les règles de déductions). Les théorèmes sont les zigzags terminaux de preuves partant d'axiomes.

(+) Exposé donné au Séminaire de Catégories de l'Université Paris 7 en automne 1981.

2. L'idée de travailler dans les catégories additives avec les carrés exacts plutot qu'avec les suites exactes remonte à Lambek, MacLane, Puppe et une bonne partie de ce qui peut être fait est exposée dans Hilton (en {8}).
Sur l'usage des carrés exacts dans les catégories non additives et le lien avec le problème du plongement de la catégorie envisagée dans diverses catégories à involutions, je renvoie le lecteur à Grandis (en {2}) où d'autres références (Čalenko et Conte, par exemple) sont indiquées.
Le succès de ce point de vue réside dans l'<u>observation-clé</u> suivante: on peut obtenir le composé de deux relations-spans $A \longleftarrow X \longrightarrow B$ et $B \longleftarrow Y \longrightarrow C$ sous la forme

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "*"] & & \\
 & X \arrow[dl] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

où $*$ est n'importe quel carré exact (voir Guitart {3}, p. 35 et {6} , p. 22). Par suite, l'étude des lois de formation des carrés exacts dans une catégorie de la forme $Ens^{\underline{C}^{op}}$ permet de connaître le calcul des relations de $Ens^{\underline{C}^{op}}$ et donc la logique déductive de ce topos.
Mais, comme on sait que les logiques des catégories $Ens^{\underline{C}^{op}}$ "sont" la sémantique naturelle de la logique intuitioniste, on voit que la méthode des carrés exacts se trouve, de fait, plus étendue que l'intuitionisme. L'intuitionisme est, en quelque sorte, la partie discrète ou 1-dimensionnelle, de la <u>logique exacte fibrée</u> introduite en {6} comme une partie principale de la logique catégorique. La logique exacte fibrée sur une catégorie $\underline{C}$ est l'étude des lois de

formation des carrés exacts dans les 2-catégories $CAT^{\underline{C}^{op}}$, Fib($\underline{C}$) , $\underline{D}_{\rightarrow}(\underline{C})$, CAT/$\underline{C}$ ... (la deuxième partie principale de la logique catégorique sur $\underline{C}$ est l'étude des monades fibrées sur $\underline{C}$, i. e. des monades dans $CAT^{\underline{C}^{op}}$ ... CAT/$\underline{C}$).

3. Les carrés exacts dans CAT , dans les 2-catégories représentables ou munies de Yoneda-structures ont été introduits par Guitart {4} et, depuis, la théorie s'est développée dans Van den Bril {10} et {11}, dans Guitart {6} , dans Guitart-Lair {7} (dans le cas de CAT , voir ici des rappels et compléments au §12).
Une première raison du succès de ces carrés exacts 2-dimensionnels est qu'effectivement à peu près tout ce que l'on fait dans CAT (e. g. carrés commas et co-commas, foncteurs riches, opaques, co-pleinement fidèles, limites et extensions absolues, adjonctions partielles et adjonctions, extensions de Kan ponctuelles) est directement et naturellement exprimable en termes de carrés exacts.
Une deuxième raison est que, dans le cas de CAT , la composition des pro-foncteurs vus comme bi-fibrations se fait encore en tenant comte de l'observation-clé du §2 .

4. Toute formule du 1er ordre peut s'écrire par des conditions de continuité et de co-continuité (Guitart-Lair, à paraître) et de telles conditions s'expriment encore par des exactitudes de carrés dans CAT , de sorte que l'étude de la validité des formules et la théorie de la déduction de formules-théorèmes à partir de formules-axiomes reviennent, en principe, à des problèmes de la logique exacte. En

particulier, les règles usuelles de déduction (principe de la contraposition, modus ponens) doivent s'exprimer sous forme de principes de constructions de carrés exacts. C'est bien le cas, comme on dit en {6} et {7} , avec les règles de modèlisation, de syntactisation, d'extension exacte (mod , syn , ex.ex). Pour réaliser la portée d'une règle comme ex.ex , il suffit de savoir qu'elle induit directement les théorèmes de Mac-Donald et Deleanu-Hilton sur l'extension de Kan de théories cohomologiques et K-théories. Pour plus de détails sur la logique exacte, je renvoie à {6} .

5. Que la théorie de la déduction soit transformable (§4) en la théorie de la construction de carrés exacts, cela revient à dire, puisque (§2) les carrés exacts sont les éléments servant à décrire les compositions de relations, que la déduction est l'étude de la catégorie des relations et, particulièrement, la détermination des triplets de relations $R: X \dashrightarrow Y$, $S: Y \dashrightarrow Z$, $T: X \dashrightarrow Z$ tels que $S \circ R = T$.
Comme dans le cas de ENS la composition de R et S se fait par union de sous-objets de Z , la théorie de la déduction se définit encore comme la recherche de la structure des objets "de sous-objets" PZ . En général, on considère que PZ est le treillis complet libre sur Z (ceci étant valable dans ENS ou un topos comme catégorie ambiante de Z). J'ai indiqué que la structure de PZ peut aussi être analysée comme extenseur (voir {5} et le §7). En tout état de cause, la structure de PZ est d'être une P-algèbre libre, et sera donc décrite quand on connaîtra la structure de P . J'ai proposé en {6} d'élucider cette struc-

ture comme celle d' univers algébrique qui est assez forte pour "faire" toutes les mathématiques du 1^{er} ordre et assez souple pour être valide quand la catégorie ambiante est un topos ou bien une catégorie d'ensembles flous.

6. Puisque le fond du problème avec PZ est de faire la théorie de la déduction (§5), Lambek-Scott en {9} ont proposé de comprendre PZ comme un ensemble déductif, i. e. un ensemble E muni d'une relation de déduction

$$\vdash \subset (\mathcal{P}_{fin}E) \times E$$

satisfaisant les axiomes:

$$\{x\} \vdash x \qquad \frac{A \vdash x \ , \ A \cup \{x\} \vdash y}{A \vdash y}$$

$$\frac{A \vdash y}{A \cup \{x\} \vdash y} \qquad \frac{\{x\} \vdash y \ , \ \{y\} \vdash x}{x = y}$$

Si $(E, \leq)$ est un sup-treillis, on peut obtenir une structure déductive $\vdash$ par:

$$\{x_1, \dots, x_n\} \vdash y \quad \text{ssi} \quad \bigvee_{i \leq n} x_i \geq y$$

$$\text{ssi} \quad \bigvee_{i \leq n} x_i = y \vee \bigvee_{i \leq n} x_i$$

7. Si $\underline{C}$ est une catégorie munie d'une monade involutive $(\mathbb{P}, I)$ (par exemple, si $\underline{C}$ est un univers algébrique), alors chaque $\mathbb{P}$-algèbre (E, θ) (et en particulier chaque PZ) a une structure d'extension Ex i. e. , pour chaque $f: I \longrightarrow E$ et $h: I \longrightarrow J$, on peut définir une ex-

tension de f le long de h par:

$$\underline{Ex}_h(f) = J \xrightarrow[a_J]{} PJ \xrightarrow[Fh]{} PI \xrightarrow[Pf]{} PE \xrightarrow[e]{} E \quad .$$

Si $\underline{C}$ est un topos ou les ensembles flous, $\underline{Ex}$ satisfait alors les axiomes d'extenseurs.
Si E a une structure d'extension, il a une structure de déduction, i. e. on peut **définir**

$$(f\colon I \longrightarrow E) \vdash (g\colon J \longrightarrow E)$$

si, et seulement si, il existe:

$$\begin{tikzcd}
I & K'' \arrow[l, "u"'] \arrow[d, "k"] & K' \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "w"'] & J \\
 & E & &
\end{tikzcd}$$

où $\underline{Ex}_u(k) = f$ et $\underline{Ex}_w(k.v) = g$.

8. Dans {7} , pp. 82 et 91 , on a considéré la figure

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{prod. fib.}\ \underline{a}"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{comma}\ \underline{b}"] & .X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\underline{c}"] & Y \arrow[d] \\
1 \arrow[r, "F"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}\ \underline{d}"] & (ENS^{\underline{S}})^{op} \arrow[r, "h(S)"'] \arrow[ur] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}\ \underline{e}"] & (CAT/\underline{S})^{op} \arrow[r, equal] \arrow[ur, "g"] \arrow[d, "\underleftarrow{\lim}"] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}\ \underline{f}"] & (CAT/\underline{S})^{op} \arrow[d, "\underleftarrow{\lim}"'] \\
1 \arrow[r] & (ENS^{\underline{S}})^{op} \arrow[r, equal] & (ENS^{\underline{S}})^{op} \arrow[r, equal] & (ENS^{\underline{S}})^{op}
\end{tikzcd}$$

On a que $(\underline{a}.\underline{b}.\underline{c})$ est exact ssi $\left(\frac{\underline{a}.\underline{b}.\underline{c}}{\underline{d}.\underline{e}.\underline{f}}\right)$ est exact, ce que l'on pouvait écrire $F \models \underleftarrow{\lim}\, g \Longleftrightarrow h(S)F \models g$,
("<u>dialectique</u>" entre modèle abstrait/formule **concrète , d'une** part, et modèle déployé/formule abstraite , d'autre part).

Il s'agit là d'un exemple important de mise en place d'un réseau exact (voir {4}) , un réseau plan de carrés étant dit exact si, en le complétant "aux places vides" par de petits carrés exacts, le grand carré final obtenu est lui-même exact.

Le calcul des carrés exacts est envisageable aussi comme calcul d'échanges entre 2-fractions droites $s.t^{*}$ et 2-fractions gauches $u^{*}.v$ et le calcul des réseaux exacts correspond à des échanges d'ordre supérieur, comme par exemple: $s_1.t_1^{*}.s_2.t_2^{*} \sim u_1^{*}.v_1.u_2^{*}.v_2$.

Comme exemple, soit le réseau (plein) complété (pointillés):

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, dashed, "u"'] \arrow[d, dashed, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\underline{ex}"] & \cdot \arrow[r, dashed, "b'"'] \arrow[d, dashed, "c'"] \arrow[dr, phantom, "\underline{ex}"] & \cdot \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "b"] & \cdot \arrow[d, "g"'] \\
\cdot \arrow[r, dashed, "d'"'] \arrow[d, dashed, "e'"'] \arrow[dr, phantom, "\underline{ex}"] & \cdot \arrow[r, "c"'] \arrow[d, "d"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d, "h"'] \\
\cdot \arrow[r, "e"'] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdot \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\underline{ex}"] & \cdot \arrow[d, dashed, "x"'] \\
\cdot \arrow[r, "l"'] & \cdot \arrow[r, "k"'] & \cdot \arrow[r, dashed, "w"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

,

si le carré extérieur (pleins et pointillés) est exact, i. e. si le réseau (traits pleins) est exact, alors on a une modification exacte du chemin (a,b,c,d,e,f) vers le chemin (g,h,i,j,k,l) décrite par la séquence:

(a,b,c,d,e,f) ————> (a,b',c',d,e,f) ————>
(a,b',c',d',e',f) ————> (a,b',u,v,e',f) ————>
(a.b'.u,f.e'.v) ————> (x.h.g,w.k.l) ————>
(g,h,x,w,k,l) ————> (g,h,i,j,k,l) .

En général, une modification exacte est à voir comme une preuve "stricte" de la relation représentée par le chemin (g,h,i,j,k,l) à partir de la relation représentée par le chemin (a,b,c,d,e,f). La "théorie des preuves" dans CAT peut être vue, de ce point de vue, comme l'étude des commutations de limites dans ENS : une preuve est un arbre avec l'indication, à chaque nœud, d'une règle de commutation de limites dans ENS . Les règles de la logique du 1^er^ ordre classique (manipulation des quantificateurs, calcul des propositions) sont effectivement de cette nature. Très particulièrement, si P et Q sont des propositions, on montre que $P \longleftrightarrow Q$ par application des règles de commutation comme

$$\text{"}\ a \wedge b \longleftrightarrow \neg(a' \vee b')\ \text{"}$$

(si $a' = \neg a$ et $b' = \neg b$), toutes ces règles étant réunies dans l'énoncé:

" Si P est une proposition, sa forme normale disjonctive équivaut à sa forme normale conjonctive (et équivaut à P elle-même) ".

9. Il y a une adjonction du type syntaxe-sémantique entre les théories d'exactitude et les théories de relations.

Pour préciser cela, on se place dans une catégorie $\underline{C}$ (la généralisation aux 2-catégories est aisée) et on considère:

1). La catégorie $P\square\underline{C}$, dont les objets sont les parties E de l'ensemble $\square\underline{C}$ des carrés commutatifs de $\underline{C}$ et dont les morphismes sont les inclusions,

2). La catégorie $PMI\underline{C}$ des pro-monades involutives sur $\underline{C}$

dont les objets sont les $(L: \underline{C} \longrightarrow \underline{R}\ ,\ I)$, où L est un foncteur bijectif sur les objets et I est une involution sur $\underline{R}$ (i. e. un foncteur $I: \underline{R} \longrightarrow \underline{R}^{op}$ laissant fixes les objets et vérifiant $I^{op}.I = Id$), et dont les morphismes sont les foncteurs $H: \underline{R} \longrightarrow \underline{R}'$ tels que $H.L = L'$ et $I'.H = H.I$.

On définit, alors, un foncteur $Ex: PMI\underline{C} \longrightarrow P\square\underline{C}$ en associant à (L,I) l'ensemble des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & \cdot \arrow[d, "v"] \\ \cdot \arrow[r, "u"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

qui, de plus, "anti-commutent dans $\underline{R}$ " , i. e. satisfont $Ls.ILt = ILu.Lv$.

Le foncteur Ex admet un adjoint à gauche

$$Re: P\square\underline{C} \longrightarrow PMI\underline{C}$$

que l'on peut décrire comme suit.

a). On désigne par $Ch(\underline{C})$ la catégorie libre des chemins de $\underline{C}$, dont les objets sont ceux de $\underline{C}$ et dont les morphismes de A à B sont les $(X_1,\dots,X_n; f_1,\dots,f_n)$ pour lesquels $X_1 = A$, $X_n = B$ et, pour tout $i \leq n$, les X_i sont objets de $\underline{C}$ et $f_i: X_i \longrightarrow X_{i+1}$ ou bien $f_i: X_{i+1} \longrightarrow X_i$ (la composition de ces morphismes se faisant alors par simple juxtaposition).

b). On désigne par $Zz(\underline{C})$ la catégorie à involution libre sur $\underline{C}$ dont les objets sont ceux de $\underline{C}$ et dont les morphismes de A vers B sont les zigzags (i. e. les chemins) tels que, pour tout $i \leq n$, f_i et f_{i+1} ne soient pas composables (la composition s'effectuant par juxtaposition, suivie si nécessaire de réduction en composant f'_1 et f_n s'ils sont composables ; ainsi, $Zz(\underline{C})$ est un quotient de $Ch(\underline{C})$).

c). Enfin, supposons donnée $E \subset \square\underline{C}$. On définit $Re(E)$ comme catégorie quotient de $Ch(\underline{C})$ par l'équivalence engendrée par les règles suivantes:

(i). on peut, dans un chemin, remplacer un

$$X \xrightarrow[f_i]{} Y \xrightarrow[f_{i+1}]{} Z$$

par $\quad X \xrightarrow[f_{i+1}.f_i]{} Z \quad ,$

(ii). on peut, dans un chemin, remplacer un $f_i : X \longrightarrow Y$ par un

$$X \xrightarrow[u]{} K \xrightarrow[v]{} Y$$

tel que $v.u = f_i$,

(iii). on peut, dans un chemin, remplacer un

$$X \xleftarrow[f_i]{} Y \xrightarrow[f_{i+1}]{} Z$$

par un X

$$X \longrightarrow K \longleftarrow Z$$

pourvu que

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f_{i+1}"'] \arrow[d, "f_i"'] & \cdot \arrow[d, "v"] \\ \cdot \arrow[r, "u"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

soit élément de E ,

(iv). on peut, dans un chemin, remplacer un

$$X \xrightarrow[f_i]{} Y \xleftarrow[f_{i+1}]{} Z$$

par un

$$X \xleftarrow[u]{} K \xrightarrow[v]{} Z$$

tel que

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "v"'] \arrow[d, "u"'] & \cdot \arrow[d, "f_{i+1}"] \\ \cdot \arrow[r, "f_i"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

soit élément de E .

Deux chemins sont équivalents ssi il existe une suite de transformations des genres (i), (ii), (iii) ou (iv) qui, appliquée à l'un, conduit à l'autre. Une telle suite est appelée une modification E-exacte.(On remarquera que, bien sûr, $Re(E)$ est aussi un quotient de $Zz(\underline{C})$: partant de $Zz(\underline{C})$, la condition (i) devient inutile mais il ne faut pas oublier, par contre, la condition (ii).)
L'involution sur $Re(E)$ est celle héritée de $Ch(E)$.
La vérification de l'adjonction $Re \dashv Ex$ (i. e. de

$$\text{" } E \subset Ex(R,I) \text{ ssi } Re(E) \longrightarrow (R,I) \text{ ")}$$

est immédiate.
On voit alors que les $Re(E)$-algèbres sont précisément les E-extenseurs.

10. De nombreuses classes E sont construites en partant d'un pseudo-foncteur $\underline{C}^{op} \xrightarrow[S]{} Cat$, tel que, pour tout

objet X de $\underline{C}$, la catégorie SX soit pensée comme "catégorie des sous-objets formels de X". On définit alors $E_S \subset \square\, \underline{C}$ comme les carrés commutatifs dont les images par S dans Cat soient exactes (i. e. soient anti-commutatifs dans $BIM \supset Cat$).
En particulier, si $S = Sub : \underline{C}^{op} \longrightarrow Cat$, avec

$$Sub(X) = \text{Catégorie des sous-objets de } X,$$

la théorie des relations $Re(E_{Sub})$ qui en résulte est le calcul des foncteurs entre les $SubX$, $SubY$ ... qui sont représentables par un chemin dans $\underline{C}$.
En associant à tout chemin c la limite projective du diagramme c, on détermine, pourvu que les carrés pull-backs soient exacts, une représentation par spans des relations; si $\underline{C}$ n'a pas de limites projectives convenables, on prend cette limite dans la catégorie $\hat{\underline{C}} = Ens^{\underline{C}^{op}}$, d'où:

$$\varprojlim \cdot Ch(\underline{C}) \longrightarrow Span\ \hat{\underline{C}}.$$

11. En fait, les modifications exactes sont des preuves "strictes en ce sens que, si dans une preuve ordinaire $H \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \ldots \longrightarrow T$ on convient de répéter à chaque étape les hypothèses précédentes dans la conclusion, on obtient une chaine d'équivalences ou modifications exactes de H:

$$H \longleftrightarrow H \wedge A \longleftrightarrow H \wedge A \wedge B \longleftrightarrow \ldots H \wedge A \wedge \ldots \wedge T.$$

En travaillant dans PZ, cela revient à ne pas utiliser "$A \subset B$" et à le remplacer par "$A \cup B = B$" ou par "$A \cap B = A$".
Si, maintenant, les relations sont des chemins, par la voie

des modifications exactes on pourra dire si $R \longleftrightarrow S$ et puis pour $R \longrightarrow T$ il faudra dire qu'il existe Q tel que $R \vee Q \longleftrightarrow T$. Mais il n'est pas clair comment définir $\vee$; cela revient à définir $\longrightarrow$. Et ensuite, on définit $R \longleftrightarrow S$ par $R \longrightarrow S$ et $S \longrightarrow R$.
Ceci conduit à l'idée de <u>carré déductif</u> , qui sont aux carrés exacts ce que $\longrightarrow$ est à $\longleftrightarrow$, comme je vais le définir au §13.

12. 1). Dans la 2-catégorie CAT , un carré exact consite (voir {4}) en quatre foncteurs S, T, U et V et une transformation naturelle $\varphi : U.S \longrightarrow V.T$

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "S"'] & \underline{Y} \arrow[d, "V"] \\ \underline{X} \arrow[r, "U"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow \varphi"] & \underline{B} \end{tikzcd}$$

tels que, dans BIM, $\tilde{\varphi} : S \boxtimes T^{\circ} \xrightarrow{\simeq} U^{\circ} \boxtimes V$, ou encore tels que les

$$\tilde{\varphi}_{X,Y}(A) : \underline{X}(X,SA) \times \underline{Y}(TA,Y) \longrightarrow \underline{B}(UX,VY) : (m,n) \longmapsto Vn.\varphi_A.Um$$

induisent un isomorphisme:

$$\tilde{\varphi}_{X,Y} : \int^{A} \underline{X}(X,SA) \times \underline{Y}(TA,Y) \xrightarrow{\simeq} \underline{B}(UX,VY) .$$

2). En plus des exemples de {4} rappelés au §3, rappelons aussi (voir {4}) que φ est exact ssi pour toute extension de Kan ponctuelle ("pointwise Kan extension") dans CAT :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "U"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\lambda}"] & B \arrow[dl] \\ & \cdot & \end{tikzcd} ,$$

8,3

la figure composée

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr] \arrow[d] & & \cdot \arrow[d] \\
\cdot \arrow[rr] \arrow[urr, phantom, "\nearrow\varphi"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, bend right, "\xrightarrow{\lambda}"'] & & \cdot \arrow[dl] \\
& \cdot &
\end{tikzcd}
$$

est encore une extension de Kan ponctuelle.

3). Bourn et Cordier ont montré en {1} que la même propriété de préservation des extensions ponctuelles est encore vraie dans BIM et ils en déduisent qu'un carré exact est la situation la plus générale qui donne lieu à une factorisation

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "S"'] & Y \arrow[d, "V"] \\
\underline{X} \arrow[r, "U"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow\varphi"] \arrow[loop left, "\Pi_S"] \arrow[d] & \underline{B} \arrow[loop right, "\Pi_V"] \arrow[d] \\
Kl\,\Pi_S \arrow[r, dashed] & Kl\,\Pi_V
\end{tikzcd}
$$

où Π_S et Π_V sont les monades de co-densité associées à S et V.

4). On peut aussi voir un carré exact φ comme une décomposition ternaire généralisée de B à cause de l'exemple suivant.

Soit E, D et M des sous-catégories de $\underline{B}$ et soit $\underline{A}$ la catégorie ayant pour objets les morphismes de D et pour morphismes les carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d"'] & \cdot \arrow[d, "d'"] \\ \cdot \arrow[r, "v"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

où u et v sont inversibles. Alors (E,D,M) est une décomposition ternaire de $\underline{B}$ ssi le carré

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{M} \arrow[d] \\ \underline{E} \arrow[r] \arrow[ur, "\varphi"] & \underline{B} \end{tikzcd}$$

est exact, si l'on pose $\varphi_d = d$.

5). Un carré φ est <u>sous-exact</u> (resp. <u>sur-exact</u>) ssi, pour tout couple (X,Y) d'objets de $\underline{X}x\underline{Y}$, $\widetilde{\varphi}_{X,Y}$ est injectif (resp. surjectif).

Etant donné φ un carré quelconque, il peut se décomposer en $\varphi = i \boxtimes_{\epsilon} s$, avec ϵ exact, $\boxtimes_{\epsilon}$ la structure multiplicative de ϵ (voir {4}, §1.5), i sous-exact et s sur-exact. Ce résultat est une version 2-dimensionnelle de la notion 1-dimensionnelle de décomposition des morphismes en épi-mono.

13. Soit donnée une 2-catégorie $\underline{\mathbb{C}}$ munie d'une classe $\mathbb{E}$ de carrés réputés "exacts" (par exemple, les carrés exacts au sens de $\underline{H}$, ou au sens de $\underline{H}^{op}$, au sens de M ... voir {4}) et soit K une classe de morphismes de $\underline{\mathbb{C}}$ appelés "comparaisons canoniques" (par exemple, les monos de $\underline{\mathbb{C}}$, ou les épis de $\underline{\mathbb{C}}$, ou les morphismes de $\underline{\mathbb{C}}$ ayant un adjoint dans $\underline{\mathbb{C}}$ ...). Avec les notations du §9, on pose:

<u>Définition</u>. Un carré

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "S"'] & Y \arrow[d, "V"] \\
X \arrow[r, "U"'] \arrow[ur, phantom, "\varphi"] & B
\end{tikzcd}$$

sera dit $\mathbb{E}$-K-<u>déductif</u> s'il existe:

(i) une modification $\mathbb{E}$-exacte λ de (S,T) en

$$X \xleftarrow{S'} A' \xrightarrow{T'} Y \quad ,$$

(ii) une modification $\mathbb{E}$-exacte μ de (U,V) en

$$X \xleftarrow{U'} B' \xrightarrow{V'} Y \quad ,$$

(iii) un morphisme $k\colon A' \longrightarrow B'$ de K tel que $k.\lambda = \mu$.

La 2-catégorie $REL_{\mathbb{E},K}(\underline{C})$ a pour objets ceux de $\underline{C}$, a pour morphismes les éléments de $Re(\mathbb{E})$, appelés <u>relations</u>, et ses 2-morphismes sont engendrés par les carrés $\mathbb{E}$-K-déductifs et seront appelés <u>preuves</u>.
Cette procédure de description de la 2-catégorie des relations améliore celle que j'avais fournie au §3 de [4].

<u>Bibliographie</u>.

[1] <u>D. Bourn et J. M. Cordier</u>, Distributeurs et théorie de la forme, Cah. de Top. et Géom. Diff. XXI-2 (1980) pp. 161-189.

[2] <u>M. Grandis</u>, Symétrisations de catégories et factorisations quaternaires, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Série VIII, Vol. XIV, Fasc. 5, Roma, 1977.

{3} R. Guitart, Monades involutives complémentées, Cah. de Top. et Géom. Diff. XVI-1 (1975), pp. 17-101.

{4} R. Guitart, Relations et carrés exacts, Ann. Sc. Math. Québec, Vol. IV-2 (1980), pp. 103-125.

{5} R. Guitart, Extenseurs, Diagrammes, Vol. 3 (1980),

{6} R. Guitart, Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ? , 3$^{\text{ème}}$ Colloque sur les catégories dédié à Charles Ehresmann, Amiens, Juillet 1980 (à paraître dans les Cah. de Top. et Géom. Diff. XXIII).

{7} R. Guitart et C. Lair, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes, Vol. 4 (1980), pp. GL 1 - GL 106 .

{8} P. Hilton, Correspondances and exact squares, Proc. of the Conf. on Cat. Alg. La Jolla, Springer, 1966.

{9} J. Lambek et P. J. Scott, Algebraic aspects of topos theory, 3$^{\text{ème}}$ Colloque sur les catégories dédié à Charles Ehresmann, Amiens, Juillet 1980, in Cah. de Top. et Géom. Diff. XXII-2 (1980), pp. 129-140.

{10} L. Van den Bril, Carrés exacts de Hilton dans des contextes non abéliens, Ann. Sc. Math. Québec, Vol. IV-2 (1980).

{11} L. Van den Bril, Exactitude dans les Yoneda-strutures, 3$^{\text{ème}}$ Colloque sur les catégories dédié à Charles Ehresmann, Amiens, Juillet 1980 (à paraître dans les Cah. de Top. et Géom. Diff. XXIII).