Diagrammes, Vol. 6, 1981.

NOTE SUR LA DETERMINATION DES HOMOLOGIES PAR LES CARRES EXACTS.

R. Guitart et L. Van den Bril

1. Rappels. Dans une catégorie abélienne $\underline{A}$ une 0-suite est un diagramme $A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} B$ où $v.u = 0$, i.e. $\mathrm{im}\, u \subset \ker v$. La 0-suite (u,v) est dite exacte si et seulement si $\mathrm{im}\, u = \ker v$; sinon son défaut d'exactitude est mesuré par $H(u,v) = \ker v / \mathrm{im}\, u$, objet de $\underline{A}$ appelé homologie de (u,v).

La catégorie Rel $\underline{A}$ des relations additives de $\underline{A}$ a pour objets ceux de $\underline{A}$ et pour morphismes de A vers B les sous-objets $R \longrightarrow A \oplus B$; la composition de R avec $S \longrightarrow B \oplus C$ est donnée par $S.R \longrightarrow A \oplus C$, avec:

" $(a,c) \in S.R$ si et seulement si il existe $b \in B$ tel que $(a,b) \in R$ et $(b,c) \in S$ ".

La symétrie $A \oplus B \xrightarrow{\sim} B \oplus A$ permet d'associer à toute relation R de A vers B la relation opposée $R°$, et ainsi Rel $\underline{A}$ est une catégorie à involution. En particulier, dans Rel $\underline{A}$ il y a identité entre les sous-objets de X et les quotients de X, et un sous-objet S de X dans Rel $\underline{A}$ est la même chose qu'un sous-objet d'un quotient de X dans $\underline{A}$, ou un quotient d'un sous-objet (voir [1] , [3] et [4]); $S \rightarrowtail\!\!\!+\!\!\!\rightarrow X$ peut se représenter par :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \cdot & \\
S \arrow[ur, tail] & & X \arrow[ul, two heads] \\
 & \cdot \arrow[ul, two heads] \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

ce carré étant bicartésien. Autrement dit, <u>les quotients</u> (i.e. <u>les sous-objets</u>) <u>de</u> X <u>dans</u> Rel $\underline{A}$ <u>sont exactement les homologies</u> $H(u,v)$, puisque l'on a :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & H \arrow[dr, tail] & & \\
 & \cdot \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, "\ker v"'] \arrow[rr, phantom, "\text{bicartésien}"] & & \cdot & \\
A \arrow[rr] & & X \arrow[ur, two heads, "\operatorname{coker} u"'] \arrow[rr] & & B
\end{tikzcd}
\qquad \text{soit} \qquad
\begin{tikzcd}
 & H & \\
A \arrow[r, "u"] & X \arrow[u, "h"', "+" marking] \arrow[r, "v"] & B
\end{tikzcd}$$

avec, en notation "ponctuelle" ,

$$X \times H \supset h = \left\{ (x,c) \ ; \ vx = 0 \quad \text{et} \quad x \bmod \operatorname{im} u = c \right\}.$$

En fait, <u>on a</u> $h.u = 0$ <u>et</u> $v.h° = 0$, <u>et</u> (voir {4}) h <u>est universelle pour cette propriété</u> : soit $r : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; L$ une relation telle que $r.u = 0$ et $v.r° = 0$, alors il existe une unique $\bar{r} : H \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; L$ appartenant à Rel $\underline{A}$ telle que $r = \bar{r}.h$. En effet, si $(x,d) \in r$, alors $vx = 0$, donc r est définie par sa valeur sur ker v ; de plus, si $x_o \in \operatorname{im} u$, $r(x_o) = 0$, donc r ne dépend de x que modulo im u , et factorise par H .

Enfin (voir par exemple {3}) un <u>carré exact</u> de $\underline{A}$ est un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[d, "V"] \\
X \arrow[r, "U"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad \left(\text{noté} : \ S \xrightarrow[U]{T} V \right)$$

tel que la suite

$$A \xrightarrow{(S,T)} X \oplus Y \xrightarrow{\langle U,-V \rangle} B$$

soit exacte, ou bien, ce qui est équivalent, tel que $S.T° \trianglelefteq U°.V$ dans Rel $\underline{A}$. On sait aussi ({2}) décrire inversement Rel $\underline{A}$ à l'aide de $\underline{A}$ et des carrés exacts dans $\underline{A}$.

L'exactitude de $S \xrightarrow[U]{T} V$ peut finalement se tester d'une manière non additive : le carré $S \xrightarrow[U]{T} V$ est exact si et seulement si pour tout carré

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "N"] \arrow[d, "M"'] & Y \arrow[d, "G"] \\ X \arrow[r, "F"'] & T \end{tikzcd}$$

satisfaisant les égalités

$$U.M = V.N \quad \text{et} \quad F.S = G.T \quad \text{, on a : } F.M = G.N \text{ .}$$

2. *Lemme. Dans une catégorie abélienne un carré* $s \xrightarrow[u]{t} v$ *est exact si et seulement si on a* (i) et (ii) :

(i) $\ker t \xrightarrow{a} \ker u$ *est un épimorphisme,*

(ii) $\operatorname{coker} t \xrightarrow{b} \operatorname{coker} u$ *est un monomorphisme* .

Preuve. Supposons d'abord le carré exact. On a donc

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & Y \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "u"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & B \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{coker} u \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & Y \arrow[d, two heads, "e"] \\ 0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} t \arrow[d, "b"] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{coker} u \end{tikzcd}$$

donc, $\ker(b.e) = \operatorname{im} t = \ker e$, donc $e^{-1}(0) = e^{-1}(\ker b)$, et comme e est un épi, $\ker b = 0$, et b est un monomorphisme. On obtient (i) de manière duale.

Réciproquement, supposons (i) et (ii), et montrons que $s \xrightarrow[u]{t} v$ est exact. Pour cela, considérons la figure suivante :

$$\begin{tikzcd}
\ker t \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, two heads, "a"'] & A \arrow[r, two heads, "t^1"] \arrow[d, dotted] & \cdot \arrow[r, tail, "t^2"] \arrow[d, dotted] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, dotted] & \operatorname{coker} t \arrow[d, tail, "b"] \\
\ker u \arrow[r, tail, "j"'] & X \arrow[r, two heads, "u^1"'] & \cdot \arrow[r, tail, "u^2"'] & B \arrow[r, two heads, "q"'] & \operatorname{coker} u
\end{tikzcd}$$

dans laquelle $t^2.t^1 = t$ et $u^2.u^1 = u$, et soit $m : Z \longrightarrow X$ $n : Z \longrightarrow Y$, $f : X \longrightarrow T$, $g : Y \longrightarrow T$. Si $u.m = v.n$, on a $g.u.m = g.v.n$, $0 = b.p.n$, $0 = p.n$, $n = t^2.h$.
Si $f.s = g.t$, on a $f.s.i = g.t.i$, $f.j.a = 0$, $f.j = 0$, $f = l.u^1$.
Alors, $f.m = l.u^1.m$ et $g.n = g.t^2.h$. Or, $u.m = u^2.u^1.m = v.n = v.t^2.h = u^2.k.h$, d'où $u^1.m = k.h$.
D'autre part, $g.t = g.t^2.t^1 = f.s = l.u^1.s = l.k.t^1$, d'où $g.t^2 = l.k$.
On conclut que $f.m = l.k.h = g.n$.

Remarque 1. On utilise en fait seulement les conditions suivantes de la figure :

- a est épi et b est mono,
- $t.i = 0$ et $q.u = 0$,
- $A \xrightarrow{t} Y \xrightarrow{p} \cdot$ et $\cdot \xrightarrow{j} X \xrightarrow{u} B$ sont exactes.

Remarque 2. Du lemme résulte aussitôt que les carrés exacts se composent.

Remarque 3. Du lemme résulte aussitôt que si $s \xrightarrow[u]{t} v$ est exact (par exemple si c'est un pull back ou un push out) et si u est un épi, alors t est un épi. Et de même si $s \xrightarrow[u]{t} v$ est exact et si t est un mono, alors u est un mono.

3. Théorème. Dans une catégorie abélienne les 0-suites $A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} B$ et $C \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} D$ ont même homologie si et seulement si il existe un diagramme du type suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & A_1 \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & A_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & \cdots \arrow[d] & A_n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & C \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & X_1 \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & X_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & \cdots \arrow[d] & X_n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & Y \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r] & B_1 & B_2 \arrow[l] \arrow[r] & \cdots & B_n \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

<u>Preuve</u>. Soit $H = \ker v / \operatorname{im} u$. On a alors :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & A \arrow[l, "="'] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & 0 \arrow[d] \\
X \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & \ker v \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ex.}"] & H \arrow[d] \\
B & 0 \arrow[l] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

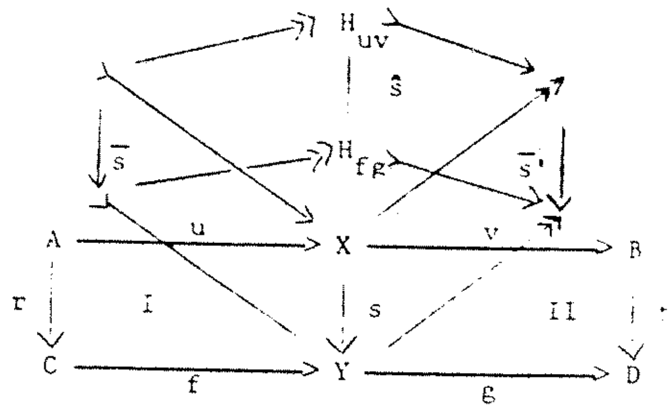
Les quatre exactitudes indiquées résultent aisément d'une vérification utilisant le lemme du n° 2.

On obtient de même un diagramme "exact" de (f,g) vers $H = \ker g / \operatorname{im} f$.

Pour la réciproque, on montre que si I et II sont exacts:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & C \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & Y \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "t"] & D
\end{tikzcd}$$

alors $\ker v / \operatorname{im} u$ est égal (mod $\hat{S}$) à $\ker g / \operatorname{im} f$. En effet, on a, d'après le n° 1 :



Comme $\overline{s}$ est le ker de II et que II est exact, $\overline{s}$ est un épi, et $\hat{s}$ aussi, et comme $\overline{s}'$ est le coker de I et que I est exact, $\overline{s}'$ est un mono, et $\hat{s}$ aussi.

<u>Remarque 1</u>. Si dans une catégorie abélienne $\underline{A}$ on se donne une classe $\underline{E}$ de O-suites appelées axiomatiquement "suites $\underline{E}$-exactes" le lemme du n° 2 produit alors une description des carrés $\underline{E}$-exacts correspondans ,et puis le théorème du n° 3 indique la définition de la $\underline{E}$-homologie des O-suites. Pour que cette $\underline{E}$-homologie soit "bonne" , il faut imposer à $\underline{E}$ des axiomes qui ne seront pas discutés ici .

<u>Remarque 2</u>. Soit $X \rightarrowtail Y$ une inclusion entre espaces topologiques. Pour que $H(X) \longrightarrow H(Y)$ soit un isomorphisme, il suffit que pour toute chaîne singulière $c \in \Delta_{q+1}Y$, la condition $\partial_q c \in \Delta_q X$ entraîne $c \in \Delta_{q+1}X$. En effet, ceci signifie, compte tenu du lemme du n° 2, que le carré suivant est exact:

$$\begin{tikzcd} \Delta_{q+1}X \arrow[r, tail] \arrow[d, "\partial"'] & \Delta_{q+1}Y \arrow[d, "\partial"] \\ \Delta_q X \arrow[r, tail] & \Delta_q Y \end{tikzcd}$$

ou encore, que le carré "renversé" , obtenu en renversanthorizontales et verticales, est exact. On conclut en utilisant le théorème, dont on voit ainsi, sur un exemple, la manière d'être utilisé en topologie.

4. Références.

[1] M.GRANDIS, Sous-quotients et relations induites dans les catégories exactes, Cahiers de Top. et Géo. Diff.,XXII, 3, 1981, pp. 231-238.

[2] R.GUITART, Relations et carrés exacts, Ann.SC.Math. Québec, IV-2, 1980, pp. 103-125.

[3] P.HILTON, Correspondences and exac squares, Proc.Conf.on Cat.alg., La Jolla Springer, 1966.

[4] V.ZÖBERLEIN, Spectral sequences and bi-Grothendieck filtrations, Oberwolfach,Kategorien, 33, 1975, pp. 107-109.