C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 1175-1178 (3 mai 1971). **Série A**

TOPOLOGIE. — *Sur l'homotopie entre relations.*

Note (*) de M. **René Guitart**, présentée par M. René Garnier.

Dans cette Note, qui fait suite à ([1]), on met le produit de deux espaces topologiques sous forme de produit tensoriel dans la catégorie des relations semi-continues inférieurement entre fermetures. Ceci nous permet ensuite de préciser parmi les définitions de l'homotopie entre relations données dans ([1]) celles qui ne sont pas dégénérées, puis de proposer de nouvelles notions.

1. Produits tensoriels. — Le foncteur de $\mathfrak{M}^{r^{\bullet}}$ dans $\mathfrak{M}^{r}$ associant à un couple (R′, R) de relations la relation $R' \times R$ [*cf.* ([1])] sera noté $\times^r$. Notons $T = (\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}, \underline{T}, \bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet})$ le bifoncteur surjacent à $\times^r$ tel que $\underline{T}((F, \nu), (E, \mu))$ soit la fermeture sur $F \times E$ ayant pour ouverts les réunions quelconques d'ensembles de la forme $V \times U$, avec U ouvert de μ et V ouvert de ν.

Lemme. — *Soit* $E \in \mathfrak{M}_0^{r}$; *l'endofoncteur* $(-) \times^r E$ *de* $\mathfrak{M}^{r}$ *déduit de* $\times^r$ *est son propre adjoint (et donc coadjoint).*

En effet, il suffit d'utiliser comme coprojecteur de but F la relation $H_{F,E} = (F, \underline{H}_{F,E}, F \times E \times E)$ associant à $\{(f, e, e')\}$ l'ensemble $\{f\}$ si $e = e'$ et $\emptyset$ si $e \neq e'$.

Ceci nous permet d'améliorer la proposition 2 de ([1]) :

Théorème 1. — *Soit* (E, μ) *une fermeture sur* $E \in \mathfrak{M}_0$:

(i) *Le foncteur* $(\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}, \Omega(-, \mu), \bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\circ\bullet})$ *admet son foncteur dual pour coadjoint.*

(ii) *Le foncteur* $(\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}, \Omega(\mu, -), \bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet})$ *admet le foncteur*

$$(\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}, T(-, \mu), \bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet})$$

pour coadjoint.

(iii) *Le foncteur* $(\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}, T(-, \mu) \circ \iota, \mathfrak{T}^{\circ})$ *admet le foncteur*

$$(\mathfrak{T}^{\bullet}, \bar{p}(-, \mu), \bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\circ})$$

pour coadjoint si et seulement si $\tau(\mu)$ *est localement compacte.*

(iv) *Le foncteur* $(\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}, T(-, \mu), \bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet})$ *n'admet pas toujours de coadjoint.*

Pour trois fermetures μ, ν et ξ on a donc les bijections naturelles :

$$\mathrm{HOM}_{\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}}(\xi, \Omega(\mu, \nu)) \simeq \mathrm{HOM}_{\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}}(\mu, \Omega(\xi, \nu)) \tag{1}$$

et

$$\mathrm{HOM}_{\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}}(\xi, \Omega(\mu, \nu)) \simeq \mathrm{HOM}_{\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\bullet}}(T(\xi, \mu), \nu). \tag{2}$$

Ainsi l'espace topologique produit de deux espaces topologiques est un produit tensoriel dans la catégorie $\bar{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot}$ des relations s. c. i. entre fermetures [(ii)], alors qu'il n'apparaît comme produit tensoriel dans $\mathfrak{T}^{\cdot}$ que si et seulement si l'un des facteurs est localement compact.

2. Soit μ une fermeture sur E. La fermeture $2_{\Sigma(\mathfrak{M})^{\cdot}}(\mu)$ définie dans [1] est évidemment isomorphe à la fermeture $U^d\mu$ sur $\mathfrak{P}(E)$ ayant pour ouverts les ensembles de la forme $O_V = \{ Y \subset E / Y \cap V \neq \emptyset \}$, avec V ouvert de μ, i. e. la fermeture la moins fine parmi les fermetures A sur $\mathfrak{P}(E)$ rendant s. c. i. de A vers μ la relation surjective U_E de $\mathfrak{P}(E)$ vers E définie par $U_E(\{A\}) = A$ pour tout $A \in \mathfrak{P}(E)$. Notons $U'^d\mu$ la fermeture induite par $U^d\mu$ sur $\mathfrak{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$: on peut alors établir pour les topologies $\tau(U'^d\mu)$ plusieurs des propriétés de la « finite topology » [par exemple, une topologie μ est quasi-compacte si et seulement si la topologie $U'^d\mu$ est quasi-compacte; *voir* aussi [3]].

De même, la fermeture $2_{\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot}}(\mu)$ est la moins fine rendant s. c. s. la relation U_E; on la notera $U^*\mu$. La fermeture $2_{\mathfrak{UC}(\mathfrak{M})^{\cdot}}(\mu)$, qui est la borne supérieure de $U^d\mu$ et $U^*\mu$, sera notée $U^{-1}\mu$.

Enfin, si ν est une fermeture sur F, on note $\gamma(\nu, \mu)$ la topologie sur l'ensemble des relations continues de μ vers ν ayant pour ouverts les réunions quelconques d'intersections finies d'ensembles de l'une des formes :

$$\mathfrak{W}_d(V, K) = \{ R \in \nu \circ \mathfrak{UC}(\mathfrak{M}) \circ \mu / K \subset (d(R))(V) \}$$

ou

$$\mathfrak{W}_*(V, K) = \{ R \in \nu \circ \mathfrak{UC}(\mathfrak{M}) \circ \mu / R(K) \subset V \},$$

avec K compact de (E, μ) et V ouvert de (F, ν). Il est clair donc que $\gamma(\nu, \mu)$ est isomorphe à $c(\tau(U^{-1}\nu), \mu)$.

Ceci dit, on vérifie aisément que pour toute fermeture μ l'espace $\tau(U^d\mu)$ est connexe par arcs, et que pour deux fermetures μ et ν la fermeture $p'(\nu, \mu)$ définie dans [1] est isomorphe à $U^d T(\nu, \mu)$, ce qui montre que *la i-homotopie faible est triviale*. On peut voir qu'*il en est de même pour la i-homotopie* [c'est-à-dire que l'espace $\bar{p}(\nu, \mu)$, isomorphe à $c(\tau(U^d\nu), \mu)$, est connexe par arcs], *mais* que, *par contre, la f. c.-homotopie*, définie donc entre éléments de $\mathfrak{UC}(\mathfrak{M})^{\cdot}$, *n'est pas dégénérée.*

DÉFINITION 1. — Deux relations continues (s. c. i. *et* s. c. s.) R_0 et R_1 entre deux fermetures μ et ξ seront dites *f. c.-homotopes* s'il existe une application continue h de $[0, 1]$ dans $\gamma(\xi, \mu)$ telle que $h(0) = R_0$ et $h(1) = R_1$.

Néanmoins, la f. c.-homotopie, en ce sens qu'elle est déduite de l'homotopie dans $\mathfrak{T}^{\cdot}$ à l'aide du foncteur adjoint $(\mathfrak{UC}(\mathfrak{M})^{\cdot}, \iota, \mathfrak{T}^{\cdot})$, n'est pas, comme l'homotopie faible [*cf.* théorème 1, (i) et (ii)], « spécifique » aux relations.

Par ailleurs, on ne peut exprimer la $(\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot}, \iota \circ \Omega(\mu, -), \Sigma(\mathfrak{M})^{\cdot})$-structure colibre $q'(\nu, \mu)$ associée à ν sous la forme $U^* K(\nu, \mu)$ avec K foncteur de $\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot\prime}$ dans $\underline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot}$ surjacent à $\times^{r}$. Puisqu'une intersection de relations s. c. s. n'est pas nécessairement une relation s. c. s., on ne peut pas non plus définir un foncteur au-dessus de $\times^{r}$ analogue à Ω dans le cas s. c. s.

Ceci nous conduit à privilégier l'homotopie faible.

3. Définition 2. — *Soient* $\mathcal{A} \subset \overline{\Sigma}(\mathfrak{M})$, (E, μ) *et* (F, ν) *deux fermetures,* R_0 *et* R_1 *deux relations de* E *vers* F. *Ces relations seront dites i-g-homotopes dans* $\mathcal{A}$ *(resp. i-g′-homotopes dans* $\mathcal{A}$*) s'il existe un élément* G *de* $\mathcal{A}$ *de source* $\Omega([0, 1], \mu)$ *et de but* ν *tel que pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *on ait*

$$\mathrm{G}(\{(0, x)\}) = \mathrm{R}_0(\{x\}) \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(\{(1, x)\}) = \mathrm{R}_1(\{x\})$$

(resp. s'il existe un élément G′ *de* $\mathcal{A}$ *de source* μ *et de but* $\mathrm{T}(\nu, [0, 1])$ *tel que pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *on ait*

$$\mathrm{G}'(\{x\})(\{0\}) = \mathrm{R}_0(\{x\}) \quad \text{et} \quad \mathrm{G}'(\{x\})(\{1\}) = \mathrm{R}_1(\{x\})).$$

On définit de même la *i-d* et la *i-d′*-homotopie dans $\mathcal{A}$ en substituant, dans l'énoncé ci-dessus, $\Omega(\mu, [0, 1])$ à $\Omega([0, 1], \mu)$; en remplaçant $\Omega([0, 1], \mu)$ par $\mathrm{T}([0, 1], \mu)$ on obtient, à la place de la *i-g*-homotopie, l'homotopie « courante », que l'on désignera par « *p*-homotopie dans $\mathcal{A}$ ». Enfin, en notant $\overline{\Omega}(\nu, \mu)$ la fermeture sur $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ borne inférieure de $\Omega(\nu, \mu)$ et de $\Omega(\mu, \nu)$, on obtient la *i-b*-homotopie dans $\mathcal{A}$ en substituant $\overline{\Omega}([0, 1], \mu)$ à $\Omega([0, 1], \mu)$ dans la définition de la *i-g*-homotopie.

Pour une sous-catégorie $\mathcal{A}^{\cdot}$ de $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot}$, ces homotopies faibles, *qui ne sont pas toujours dégénérées*, pourront être considérées comme préliminaires à une théorie de l'homotopie propre à $\mathcal{A}^{\cdot}$.

Les définitions ci-dessus sont valables sans changement pour des parties $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{N}\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$. On remarquera, par exemple, que la *i-g′*-homotopie dans $\mathcal{A}$ correspond à la *p*-homotopie dans l'image de $\mathcal{A}$ par l'anti-isomorphisme canonique de $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot}$ sur $\mathfrak{N}\mathfrak{O}(\mathfrak{M})^{\cdot}$.

On peut trouver des conditions sur $\mathcal{A}^{\cdot}$ pour que ces définitions donnent lieu à des catégories quotients de $\mathcal{A}^{\cdot}$. Ainsi, en notant u l'application partielle de $[0, 1]$ sur $[0, 1/2]$ définie sur $[0, 1/2[$ par $u(t) = t$, on a :

Proposition 1. — *Soit* $\mathcal{A}^{\cdot}$ *une sous-catégorie de* $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot}$ *stable par* $\Omega(-, -)$ *et par réunions finies de relations, ayant pour éléments tous les homéomorphismes de source* $[0, 1]$ *ainsi que* u. *Alors la i-g-homotopie restreinte à* $\mathcal{A}^{\cdot}$ *est une relation d'équivalence, qui est compatible avec la composition dans* $\mathcal{A}^{\cdot}$.

4. On pourra s'intéresser à la définition 2 en prenant pour $\mathcal{A}^{\cdot}$ l'une des catégories suivantes : $\mathfrak{T}^{\cdot}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{C}(\mathfrak{M})^{\cdot}$, $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{O}(\mathfrak{M})^{\cdot}$, $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M})^{\cdot} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{F}(\mathfrak{M})^{\cdot}$, catégorie des relations entre fermetures s. c. i. et propres, catégorie des relations entre fermetures s. c. i. et finitaires, catégorie des relations entre fermetures s. c. i. et paires [i. e. $\mathrm{R}(\{x\})$ est fini et paire pour tout x], catégorie

des relations entre fermetures s. c. i. et non pleines [i. e. R(A) est différent du but de R pour tout A], etc. Dans ces cas, l'une au moins des notions précédentes n'est pas dégénérée.

Dans une prochaine publication nous étudierons tout particulièrement le cas des relations ouvertes et compactes, et nous situerons la définition 2 vis-à-vis de l'homotopie simpliciale et de (4).

(*) Séance du 26 avril 1971.

(1) R. Guitart, *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 635.

(2) R. Guitart, *Comptes rendus*, 270, série A, 1970, p. 1572.

(3) O. Feichtinger, *Properties of the λ topology*, Lecture Notes, n° 171, Springer, 1970, p. 17. On trouvera d'ailleurs dans cette publication récente une autre formulation de certains résultats de (1) et (2).

(4) D. G. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes, n° 43, Springer, 1967.

(*Département de Mathématiques,*
Université de Paris VII,
9, *quai Saint-Bernard*, Tours 45-55,
75-*Paris*, 5e.)

183817. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.