C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 558-561 (27 septembre 1971) Série A

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Sur les fonctions associées à la notion de sous-structure.* Note (*) de M. **René Guitart**, présentée par M. René Garnier.

Dans cette Note, suite naturelle à quatre Notes précédentes, particulièrement à (3) et (4), mais qui peut être lue presque indépendamment, on dégage, à partir de cas particuliers, les notions de foncteur et triple de sous-structure. Le problème ainsi envisagé avait déjà été posé dans (6).

1. Première construction. — Soit $C^{\cdot}$ une catégorie telle que :

(i) les limites projectives finies existent dans $C^{\cdot}$; en particulier, $C^{\cdot}$ possède un objet final noté $\mathbf{1}$; si (f, h, h', f') est un quatuor cartésien où $f.h' = h.f'$, alors h' est noté $f^*(h)_{f'}$ ou $f^*(h)$ lorsque l'indication de f' est superflue;

(ii) il existe un morphisme $T \in C^{\cdot}$ de source $\mathbf{1}$ et de but noté $\mathbf{2}$ tel que, pour tout $e \in C^{\cdot}_0$, l'application de $\mathbf{2}.C.e$ dans l'ensemble des sous-objets de e qui à φ associe $\varphi^*(T).C^{\cdot}_{\varphi}$ soit bijective;

(iii) pour tout $e \in C^{\cdot}_0$, l'objet $\mathbf{2}$ admet une $(-)\times e$-structure colibre, notée 2^e, naturalisée par un coprojecteur ε_e de source $2^e \times e$ et de but $\mathbf{2}$;

(iv) tout morphisme de la forme $f = p.m$, où m est un monomorphisme et p une projection canonique d'un produit fini sur l'un de ses facteurs, admet une image $\mathrm{im}(f)$ dans $C^{\cdot}$; si (f, h, h', f') est un quatuor cartésien tel que f et f' soient des composés d'un monomorphisme et d'une projection, alors $(\mathrm{im}(f), h, \overline{h}', \mathrm{im}(f'))$ est cartésien, avec $\overline{h}' = ((\mathrm{im}(f))^*(h).\varphi$, où φ est l'unique morphisme tel que $h^*(\mathrm{im}(f)).\varphi = \mathrm{im}(f')$.

Si $\alpha(f) = e$ et $\beta(f) = e'$, on note 2^f le morphisme déterminé par

$$\varepsilon_e.(2^f \times e) = \varepsilon_{e'}.(2^{e'} \times f).$$

L'application qui à f associe 2^f définit un foncteur de $C^{\cdot}$ vers C^*, noté $2^{(-)}$.

On posera $2^{2^f} = \Pi(f)$. L'application associant $\Pi(f)$ à f définit un foncteur de source et de but $C^{\cdot}$, noté Π.

Soit Δ_e le morphisme diagonal de e dans $e \times e$ et q_e défini par

$$q_e^*(T) = \Delta_e.$$

Soit i_e le morphisme de e dans 2^e que détermine l'égalité

$$\varepsilon_e.(i_e \times e) = q_e.$$

Alors i_e est un monomorphisme, (1). On pose $O_e = \varepsilon_e^*(T)$ et $H_e = \alpha(O_e)$.

Soit ξ_e l'isomorphisme de $2^e \times e \times 2^e \times e$ sur $2^e \times 2^e \times e \times e$ échangeant les deuxième et troisième facteurs.

On pose alors $j_e = (2^e \times 2^e \times \Delta_e)^*(\xi_e.(O_e \times O_e))$ et $R_e = \alpha(j_e)$.

Soit j_e^1 le composé de j_e avec la projection canonique de $2^e \times 2^e \times e$ sur $2^e \times 2^e$ et φ_e défini par $\varphi_e^*(\mathrm{T}) = \mathrm{im}\,(j_e^1)$. Enfin, ψ_e est déterminé par $\varepsilon_{2^e}.(\psi_e \times 2^e) = \varphi_e$. Remarquons que φ_e, et *a fortiori* ψ_e, sont indépendants du choix des produits fibrés.

On montre, en utilisant le théorème ci-dessous, que $2^{i_e}.\psi_e = 2^e$, et donc, en particulier, que ψ_e *est un monomorphisme.*

On pose $t_e = \psi_e . i_e$; comme composé de deux monomorphismes, t_e est un monomorphisme.

Si e et e' appartiennent à $\mathrm{C}_0^{\cdot}$, on note $\mathrm{S}_{e,e'}$ l'isomorphisme canonique de $e \times e'$ sur $e' \times e$. Soit g un morphisme de source e et de but $2^{e'}$; on note g^d le morphisme que définit l'égalité

$$\varepsilon_{e'}.(g \times e') = \varepsilon_e.(g^d \times e).\mathrm{S}_{e,e'}.$$

Si $f \in \mathrm{C}$, $\alpha(f) = e$ et $\beta(f) = e'$, alors

$$(i_{e'}.f)^d = 2^f.i_{e'},$$

et l'on pose

$$\mathfrak{T}(f) = 2^{((i_{e'}.f)^d)}.\psi_e.$$

Du théorème suivant découle que, pour tout $e \in \mathrm{C}_0^{\cdot}$, $\mathfrak{T}(e) = 2^e$, que $\mathrm{T} = i_1$ et que $2 = \mathfrak{T}(1)$.

Théorème. — (*a*) *Pour tout* $f \in \mathrm{C}$ *de source* e *et de but* e', *on a* $\mathfrak{T}(f).i_e = i_{e'}.f$;

(*b*) $(t_e)_{e \in \mathrm{C}_0^{\cdot}}$ *définit une transformation naturelle* $(\Pi, t, \mathrm{Id}_{\mathrm{C}^{\cdot}})$;

(*c*) *supposons, de plus, que l'application de* $\mathrm{C}_0^{\cdot}$ *dans* $\mathrm{C}_0^{\cdot}$ *qui à* e *associe* 2^e *soit injective; alors, en notant* $\mathfrak{T}^*(\mathrm{C}^{\cdot})^{\cdot}$ *la sous-catégorie de* $\mathrm{C}^{\cdot}$ *image de* $\mathrm{C}^{\cdot}$ *par le foncteur* $2^{(-)}$ *et* $\mathbf{P}_{\mathrm{C}^{\cdot}}^{\cdot}$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{C}^{\cdot}$ *ayant pour unités celles de la forme* 2^e, *les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *le foncteur injection canonique de* $\mathfrak{T}^*(\mathrm{C}^{\cdot})^{\cdot}$ *dans* $\mathrm{C}^{\cdot}$ *admet pour adjoint* [2] *le foncteur* $(\mathfrak{T}^*(\mathrm{C}^{\cdot})^{\cdot}, \underline{\Pi}, \mathrm{C}^{\cdot})$;

(ii) *le triple dans* $\mathrm{C}^{\cdot}$ *associé à cette adjonction peut s'écrire* $\mathbf{\Pi} = (\Pi, t, 2^{\cdot\mathfrak{T}})$, *où* $2^{\cdot\mathfrak{T}}$ *est la transformation naturelle de* Π^2 *vers* Π *associant* $2^{\cdot\mathfrak{T}(e)}$ *à chaque* $e \in \mathrm{C}_0^{\cdot}$;

(iii) *la catégorie de Kleisli de* $\mathbf{\Pi}$ *est isomorphe à la catégorie* $\mathbf{P}_{\mathrm{C}}^{*}$, *duale de* $\mathbf{P}_{\mathrm{C}^{\cdot}}^{\cdot}$.

2. Deux autres exemples. — A. Soit $\mathcal{M}^0$ une catégorie pleine d'applications associée à un univers $\mathcal{M}_0$ et $(\mathfrak{T}, \gamma, \mathrm{U})$ le triple dans $\mathcal{M}^0$, où $\mathfrak{T}$ est le foncteur partie et, pour tout $\mathrm{E} \in \mathcal{M}_0$, où γ_{E} est l'application de E dans $\mathfrak{T}(\mathrm{E})$ associant $\{x\}$ à chaque $x \in \mathrm{E}$, tandis que U_{E} est l'application de $\mathfrak{T}^2(\mathrm{E})$ dans $\mathfrak{T}(\mathrm{E})$ associant à un ensemble de parties $\mathfrak{A}$ sa réunion $\cup\mathfrak{A}$.

En plus des notations et définitions introduites dans (4), pour toute fermeture (E, μ), on pose

$$\mathfrak{T}_i((\mathrm{E}, \mu)) = (\mathfrak{T}(\mathrm{E}), \mathrm{U}^d \mu), \qquad \mathfrak{T}_s((\mathrm{E}, \mu)) = (\mathfrak{T}(\mathrm{E}), \mathrm{U}^* \mu)$$

et

$$\mathfrak{T}_c((\mathrm{E}, \mu)) = (\mathfrak{T}(\mathrm{E}), \overset{1}{\mathrm{U}} \mu).$$

Proposition. — *Si* $\delta = i$ (resp. s, c), *alors* γ *et* U *se relèvent en des transformations naturelles* $\overline{\gamma}_\delta$ *et* $\overline{\mathrm{U}}_\delta$ *telles que* $(\mathfrak{T}_\delta, \overline{\gamma}_\delta, \overline{\mathrm{U}}_\delta)$ *définisse un triple dans* $\Sigma(\mathcal{M})^0$, *dont la catégorie de Kleisli est* $\overline{\Sigma}(\mathcal{M})^0$ [resp. $\underline{\Sigma}(\mathcal{M})^0$, $\mathfrak{U}\mathfrak{C}(\mathcal{M})^0$].

On peut définir des triples analogues dans la catégorie $\mathfrak{T}^0$ des applications continues entre espaces topologiques, lesquels triples admettent des restrictions à certaines sous-catégories de $\mathfrak{T}^0$, par exemple à la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{T}^0$ ayant pour objets les topologies quasi-compactes.

B. Soit $\mathcal{O}^0$ la catégorie construite sur $\mathcal{M}_0$ ayant pour objets les ensembles non vides munis d'un ordre strict et pour morphismes les applications strictement croissantes entre ces objets. Notons ω le foncteur de $\mathcal{O}^0$ vers $\mathcal{M}^0$ oubliant l'ordre. Alors, pour tout objet $(E, <)$, on munit l'ensemble $\mathfrak{S}_\omega((E, <))$ de ses ω-sous-structures de l'ordre strict $\overline{<}$ défini par $(E', <_{|E'}) \overline{<} (E'', <_{|E''})$ si, et seulement si, pour tout $e' \in E'$ et tout $e'' \in E''$, on a $e' < e''$.

L'ensemble ordonné ainsi défini sera noté $S_\omega((E, <))$. Les applications γ_E et U_E ont des restrictions évidentes à $\mathfrak{S}_\omega((E, <))$ et $\mathfrak{S}_\omega(S_\omega((E, <)))$ que l'on notera $\gamma_{(E,<)}$ et $U_{(E,<)}$.

Proposition. — (S_ω, γ, U) *définit un triple dans* $\mathcal{O}^0$.

On remarquera que les ensembles bien ordonnés, non vides, s'identifient à des algèbres de ce triple.

3. Sous-structures et triples. — Le problème de la détermination, dans une catégorie, d'un triple « représentant » les singletons, les sous-structures et leur agrégation se précise par les définitions suivantes :

A. Soit $p = (K^\cdot, \underline{p}, H^\cdot)$ un foncteur et K' une classe de monomorphismes de $K^\cdot$; pour tout $s \in H^\cdot_0$ on note $\mathfrak{S}_{0(p,K')}(s)$ l'ensemble des (p, K')-sous-structures de s [3]; si K' est évidente, $\mathfrak{S}_{0(p,K')}$ est abrégé en $\mathfrak{S}_{0,p}$. Si $q = (\mathcal{M}^0, \underline{q}, L^\cdot)$ est un foncteur, on peut envisager les propriétés suivantes :

P 1. $\mathfrak{S}_{0(p,K')}$ se factorise par q_0 en un $S_{0(p,K')}$.

P 2. $S_{0(p,K')}$ se prolonge en un foncteur $S_{0(p,K')}$.

P 3. $S_{0(p,K')}$ se prolonge en un foncteur contravariant $S'_{(p,K')}$.

Par exemple, soit ψ le foncteur de $\Sigma(\mathcal{M}^0)^*$ vers $\mathcal{M}^0$ associant à une fermeture (E, μ) l'ensemble $\psi(\mu)$ des parties de E fermées pour μ. Alors, pour toute catégorie d'homomorphismes entre structures algébriques usuelles (groupes, anneaux, corps, monoïdes, catégories), soit p son foncteur d'oubli évident vers $\mathcal{M}^0$. Il est clair que $\mathfrak{S}_{0,p}$ *vérifie* P 1 *et* P 2 *pour* $q = \psi$.

B. Dans le cas où $K^\cdot = \mathcal{M}^0$ et où $q = p$, on peut considérer les propriétés :

P′ 1. $\mathfrak{S}_{0(p,\mathcal{M}')}$ se factorise à travers p par un $S_{0(p,\mathcal{M}')}$.

P′ 2. L'une des applications $S^n_{0(p,\mathcal{M}')}$, $n \in \mathbf{N}$, se prolonge en un foncteur $S^n_{(p,\mathcal{M}')}$.

P′ 3. L'une des applications $S^{n}_{0(p,\mathfrak{M}')}$, $n \in \mathbf{N}$, se prolonge en un foncteur contravariant $S^{n}_{(p,\mathfrak{M}')}$.

P 4. $S^{n}_{(p,\mathfrak{M}')}$ est l'endofoncteur d'un triple dans H˙.

C. Dans le cas où p est de la forme $\mathrm{Hom}_{H^{\cdot}}(-, e)$ se présente la propriété :

P″ 1. il existe une fonction S_0 de $H^{\cdot}_0$ dans $H^{\cdot}_0$ telle que pour tout $e' \in H^{\cdot}_0$ il y ait une bijection entre $p(S_0(e'))$ et l'ensemble des $(p, \mathfrak{M}')$-monomorphismes de but e'.

Dans ce cas, si toute $(p, \mathfrak{M}')$-sous-structure est déterminée par un unique $(p, \mathfrak{M}')$-monomorphisme, alors P′ 1 est vérifiée, avec $S_{0(p,\mathfrak{M}')} = S_0$.

Si, de plus, H˙ est à produits fibrés finis canoniques et si l'on se donne un monomorphisme m de e dans $S_0(e)$, le produit fibré le long de m définit une application $f_{e'}$ de $\mathrm{Hom}_{H^{\cdot}}(S_0(e), e')$ dans l'ensemble des monomorphismes de but e'. La source d'un $(p, \mathfrak{M}')$-monomorphisme de but e', élément de l'image de $f_{e'}$, sera dite *$(p, \mathfrak{M}')$-sous-structure (S_0, m)-élémentaire* de e'.

Ainsi, dans l'exemple 2 A, on récupère, suivant le S_0 utilisé, les ouverts ou les fermés comme sous-espaces $(S_0, 1)$-élémentaires (1 étant l'espace topologique à un élément).

(*) Séance du 20 septembre 1971.

(1) J. Bénabou et J. Celeyrette, *Généralités sur les topos de Lawvere et Tierney*, Séminaire Bénabou, multigraphié, Paris, 1971.

(2) Ce résultat, dans le cas ensembliste, est déjà énoncé dans (3).

(3) R. Guitart, *Comptes rendus*, 270, série A, 1970, p. 1398.

(4) R. Guitart, *Comptes rendus*, 271, série A, 1971, p. 1572 et 272, série A, 1971, p. 1175.

(5) C. Ehresmann, *Cours de* C_3 (*Algèbre*, C. D. U., 1968, Paris).

(6) R. Guitart, *Thèse de 3e cycle* (*Esquisses mathématiques*, 1, Paris, 1970)

Université de Paris VII,
Département de Mathématiques,
Tour 45-55,
2, *place Jussieu,*
75-*Paris*, 5e.

184465. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e)
Imprimé en France