ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Sur les idempotents dans les triples et la description des structures.* Note (*) de M. **René Guitart**, présentée par M. René Garnier.

On définit les morphismes continus entre « idempotents » dans un triple, et on explicite les exemples fondamentaux des pseudo-congruences et des topologies tordues. Ces deux exemples sont en fait relatifs aux deux triples associés à la donnée d'une construction standard contravariante stricte dans une catégorie pleine d'applications. Une telle donnée dans une catégorie C˙ permet de refaire dans C˙ la théorie des ensembles sans négation. Comme cas particuliers on retrouve la notion de forêt plantée et le problème de l'extraction de racines carrées dans un groupe.

Pour l'algèbre des catégories les notations sont celles de (1).

1. Définition des catégories $\mathrm{Idem}(\bar{S}, K)^{\cdot}_{Q}$. — Soit $\bar{S} = (S, i, m)$ un triple dans une catégorie $C^{\cdot}$. Un morphisme M de $C^{\cdot}$ de source e et but $S(e)$ sera dit $\bar{S}$-*idempotent* en e si M est égale à $m_e . S(M) . M$. Si $U = (C^{\cdot}, \underline{U}, H^{\cdot})$ et $F = (H^{\cdot}, \underline{F}, C^{\cdot})$ forment un couple de foncteurs adjoints induisant le triple $\bar{S}$, la donnée de M équivaut à la donnée d'un idempotent dans $H^{\cdot}$ au point $F(e)$.

Soit M (resp. M′) un $\bar{S}$-idempotent en e (resp. en e') et f un morphisme dans $C^{\cdot}$ de e vers e'; le triplet (M', f, M) sera dit $\bar{S}$-*continu* si

$$\text{(C)} \qquad M'.f = m_{e'} . S(M'.f).M.$$

Grâce à l'associativité de m et à l'idempotence, on voit que l'ensemble des morphismes $\bar{S}$-continus (M', f, M) devient une catégorie $\mathrm{Idem}(\bar{S})^{\cdot}$ pour la composition évidente.

L'application qui à (M', f, M) associe f détermine un foncteur $\Theta_{\bar{S}}$ de $\mathrm{Idem}(\bar{S})^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ tel que la $\Theta_{\bar{S}}$-structure libre sur $e \in C^{\cdot}_0$ soit le $\bar{S}$-idempotent i_e.

Si K est un sous-foncteur de S défini par une transformation naturelle $j = (S, j, K)$, on appelle $(\bar{S}, K)$-idempotent en $e \in C^{\cdot}_0$ un $\bar{S}$-idempotent M en e tel qu'il existe un M′ vérifiant $M = j_e . M'$. On désigne par $\mathrm{Idem}(\bar{S}, K)^{\cdot}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Idem}(\bar{S})^{\cdot}$ ayant pour objets les $(\bar{S}, K)$-idempotents. Soit R un morphisme de $C^{\cdot}$ de source e et but $S(e')$. On note $C^{\cdot}(\bar{S}, R)^{\cdot}$ la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ engendrée par

$$\{ S^p(M) / p \in \mathbf{N} \} \cup \{ S^p(i_{S^q(u)}) / p, q \in \mathbf{N};\ u = e, e' \} \cup \{ S^p(m_{S^q(u)}) / p, q \in \mathbf{N};\ u = e, e' \}.$$

Une condition Q sur R s'exprimant par l'égalité de deux éléments de $C^{\cdot}(\bar{S}, R)^{\cdot}$ sera dite $\bar{S}$-*simple*. [Par exemple, l'idempotence et la condition strictement plus forte $S(M).M = S(M).i_e$]. On appelle $\bar{S}$-*élémentaire* une condition $\bar{S}$-simple de la forme « (h, f, g) est $\bar{S}$-continu », f, g et h

étant des éléments de $C^{\cdot}(\overline{S}, R)^{\cdot}$. Les exemples ci-dessus sont en fait $\overline{S}$-élémentaires. On peut montrer qu'*il existe une infinité dénombrable de conditions $\overline{S}$-élémentaires deux à deux indépendantes.*

Définition 1. — On note $\mathrm{Idem}(\overline{S}, K)^{\cdot}_{Q}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Idem}(\overline{S}, K)^{\cdot}$ ayant pour objets les $(\overline{S}, K)$-idempotents satisfaisant la condition $\overline{S}$-simple Q.

Exemples 1. — Soit $\overline{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{P}, \gamma, \cup)$ le triple « parties » [2] dans une catégorie pleine d'applications, et Q_0 la condition $\overline{\mathfrak{P}}$-simple définie par $\mathfrak{P}(M).M = \mathfrak{P}(M).\gamma_E$; la catégorie $\mathrm{Idem}(\overline{\mathfrak{P}})^{\cdot}_{Q_0}$ est la catégorie des morphismes entre *pseudo-congruences* [*voir* [3]]. La sous-catégorie pleine de $\mathrm{Idem}(\overline{\mathfrak{P}})^{\cdot}_{Q_0}$ ayant pour objets les pseudo-congruences réflexives est exactement la catégorie $P^{\cdot}$ des applications compatibles entre ensembles munis de relations d'équivalences.

2. Toujours avec les notations de [2] désignons par T_g le sous-foncteur de Π tel que $T_g(X)$, pour tout ensemble X, soit formé des ensembles $\mathbf{A}$ de parties de X tels que $\emptyset \notin \mathbf{A}$ et que pour tout A et B inclus dans X, « $A \cup B \in \mathbf{A}$ » équivalle à « A ou $B \in \mathbf{A}$ ».

Par ailleurs, appelons *topologie gauche* ou *tordue* sur un ensemble X la donnée d'une application μ de $\mathfrak{P}(X)$ dans lui-même idempotente, additive, et telle que $\mu(\emptyset) = \emptyset$. [Exemples : (X, λ) étant une topologie définie par son application de fermeture λ, l'application ν de $\mathfrak{P}(X)$ dans lui-même associant à toute partie A de X l'ensemble des points non isolés de $\lambda(A)$ est une topologie gauche, ainsi, naturellement, que λ.] Appelons fermé de μ une partie Y de X telle que $\mu(Y) = Y$, et application continue de μ définie sur X vers μ' définie sur X', une application f de X dans X' telle que pour tout fermé Y' de μ', $f^{-1}(Y')$ soit un fermé de μ. Enfin notons $\mathcal{C}^0_g$ la catégorie (au-dessus de $\mathfrak{M}_0$) des applications continues entre topologies gauches.

Proposition. — *La catégorie $\mathcal{C}^0_g$ est isomorphe à* $\mathrm{Idem}(\overline{\Pi}, T_g)^{\cdot}$.

2. Congruences dans un endofoncteur contravariant naturalisé. — La définition de $\mathrm{Idem}(\overline{S})^{\cdot}$ ne fait pas intervenir l'unité i du triple $\overline{S}$, et ne dépend que du système associatif (S, m), de sorte que pour un système associatif quelconque $\overline{L} = (L, m)$ on peut introduire la catégorie $\mathrm{Idem}(\overline{L})^{\cdot}$. En particulier, étant donné un foncteur contravariant F dans une catégorie $C^{\cdot}$ et une transformation naturelle t de $\mathrm{Id}_{C^{\cdot}}$ vers $F_0 F = F^2$, la transformation naturelle $F.t_F$ de F^4 vers F^2 est associative, et l'on peut parler de $\mathrm{Idem}((F^2, F.t_F))$.

On appelle endofoncteur contravariant naturalisé (e. c. n.) dans une catégorie $C^{\cdot}$ la donnée d'un triplet $(F, i, d) = U$, où F est un foncteur de $C^{\cdot}$ dans C^*, où i est une famille $(i_c)_{c \in C^{\cdot}_0}$ de morphismes de $C^{\cdot}$ telle que, pour tout e, le morphisme i_e soit de source e et de but $F(e)$, et où d est une famille $(d_e)_{e\in C_0^\cdot}$ de morphismes de $C^\cdot$ telle que d_e, pour tout e, soit de source $F(e)$ et de but $F^2(e)$, ces trois données étant assujetties à la condition que, en posant $t_e = d_e . i_e$, la famille $t = (t_e)_{e\in C_0^\cdot}$ soit une transformation naturelle de $\mathrm{Id}_{C^\cdot}$ vers F^2. Si de plus pour tout e on a $F(t_e).t_{F(e)} = F(e)$ [auquel cas le triplet $(F^2, t, F.t_F)$ est bien un triple dans $C^\cdot$], on dit alors que U est bien naturalisé (e. c. b. n.). On note P_U l'application de C dans C qui pour un f de source e et de but e' prend la valeur $P_U(f) = F(i_{e'}).F^2(f).d_e$.

Exemple. — Dans ([2]) ou le paragraphe 4 de ([3]), on a essentiellement montré comment, dans une catégorie munie d'une T-égalité et d'une T-appartenance [hypothèse (ii) et (iii) de ([2])] on fabriquait un e. c. b. n. $(2^{(-)}, i, \psi) = \mathfrak{Q}$ représentant les T-sous-objets, et inversement comment la T-appartenance pouvait s'écrire à partir de $\mathfrak{Q}$; la fonction $P_{\mathfrak{Q}}$, alors notée $\mathfrak{T}$, pouvait jouer le rôle de fonction T-sous-objets interne à $C^\cdot$.

Définition 2. — Soit U un e. c. n. dans une catégorie $C^\cdot$. On appelle catégorie des *U-congruences* de $C^\cdot$, et on note $C_g(U)^\cdot$, la catégorie dont les objets sont les couples (R, e), où $e \in C_0^\cdot$, et où R est un morphisme de $C^\cdot$ de source e et de but $F(e)$ tel que $d_e.R$ soit un objet de $\mathrm{Idem}((F^2, F.t_F))^\cdot$ et que

$$F(R).i_{F(e)}.R = R,$$

les morphismes étant les triplets $((R', e'), f, (R, e))$, où f est un morphisme de $C^\cdot$ de e vers e', tels que $(d_{e'}.R', f, d_e.R)$ soit élément de $\mathrm{Idem}((F^2, F.t_F))^\cdot$, et que (R, e) et (R', e') soient bien des objets de $C_g(U)^\cdot$. Par exemple, la catégorie des $\mathfrak{Q}$-congruences de $\mathfrak{M}^\circ$ est la catégorie $P^\cdot$. On peut voir aussi qu'à tout entier n on peut associer des e. c. n. $\mathcal{N}$, et donc, d'après ce qui précède, définir des notions de $\mathcal{N}$-congruences.

3. Constructions standards contravariantes strictes

Définition 3. — On appelle *construction standard contravariante stricte* (c. s. c. s.) dans une catégorie $C^\cdot$ la donnée d'un e. c. b. n. $U = (F, i, d)$ tel que :

1° Pour tout $e \in C_0^\cdot$, on ait

$$F(d_e).d_{F(e)} = d_e.F(t_e).d_{F(e)};$$

2° Pour tout $f \in C^\cdot$ de e vers e' on ait

$$F^2(f).d_e = d_{e'}.F(i_{e'}).F^2(f).d_e.$$

Alors $F(t_e).d_{F(e)}$ est désigné par V_e.

Proposition. — *Soit* U *une* c. s. c. s. *dans une catégorie* $C^\cdot$. *Alors les triplets* $(F^2, t, F.t_F) = \overline{\Pi}_U$ *et* $(P_U, i, V) = \overline{P}_U$ *sont des triples dans* $C^\cdot$, *et* d *détermine une transformation naturelle de* P_U *vers* F^2 *définissant* $\overline{P}_U$ *comme* *sous-triple de* $\overline{\Pi}_{\mathrm{U}}$. *La catégorie de* Kleisli $\mathrm{R}^{\cdot}_{\mathrm{U}}$ (resp. $\mathrm{HR}^{\cdot}_{\mathrm{U}}$) *de* $\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{U}}$ (*resp. de* $\overline{\Pi}_{\mathrm{U}}$) *est alors appelée catégorie des* U-relations (*resp, catégorie des* U-hyper-relations). *L'application* $\tilde{d}$ *de* R_{U} *dans elle-même qui à un élément r de* $e'.\mathrm{R}_{\mathrm{U}}.e$ *associe* $\tilde{d}(r) = \mathrm{F}(r).t_e$ *définit un antiisomorphisme de* $\mathrm{R}^{\cdot}_{\mathrm{U}}$. *Si* J *désigne le foncteur canonique de* $\mathrm{R}^{\cdot}_{\mathrm{U}}$ *vers* $\mathrm{C}^{\cdot}$ *et* I *son adjoint canonique, on vérifie que* $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0\, \tilde{d}_0\, \mathrm{I}$.

Cette proposition généralise donc une partie des résultats de ([4]).

Remarque 1. — Soit U une c. s. c. s. dans une catégorie $\mathrm{C}^{\cdot}$, et u un élément de $\mathrm{C}^{\cdot}_0$. Si l'on appelle (U, u)-sous-objet de e la donnée d'un morphisme h de u vers $\mathrm{F}(e)$, le morphisme $\tilde{d}(f)$ est nommé *morphisme caractéristique* de h. On voit alors que pour tout f, $\mathrm{F}(f)$ définit bien les images réciproques de (U, u)-sous-objets.

Grâce à la notion de foncteur type de ([5]) et à la notion de transformation naturelle structurale de ([6]), adaptées d'une manière évidente ici, on peut définir les structures « (U, u)-*définissables* » sur les objets de $\mathrm{C}^{\cdot}$. Aussi le couple $(\mathrm{U}, u) = \mathfrak{U}$ peut être appelé *univers abstrait* pour et dans $\mathrm{C}^{\cdot}$.

Remarque 2. — L'existence d'une c. s. c. s. dans la catégorie associée à un ordre $(\mathrm{E}, \trianglelefteq)$ équivaut à la condition que cet ordre soit une *forêt plantée*, c'est-à-dire soit somme disjointe d'arbres avec premier élément ou pied; la c. s. c. s. est alors déterminée par la fonction de E dans E qui à tout x associe le pied de l'arbre auquel x appartient.

La donnée d'une c. s. c. s. dans un groupe $\mathrm{G}^{\cdot}$ considéré comme catégorie équivaut à celle d'un $a \in \mathrm{G}$ et d'un automorphisme h de $\mathrm{G}^{\cdot}$ tel que, avec $b = h(a).a$, h^2 soit l'automorphisme intérieur qui à tout x associe $b.x.b^{-1}$. Le foncteur P_{U} correspondant est alors l'automorphisme intérieur qui à x associe $a.x.a^{-1}$. En particulier, en supposant soit que h est l'identité sur $\mathrm{G}^{\cdot}$ soit que a est l'élément neutre de $\mathrm{G}^{\cdot}$, on est amené à rechercher soit les racines carrées des éléments du centre de $\mathrm{G}^{\cdot}$, soit les involutions sur $\mathrm{G}^{\cdot}$.

(*) Séance du 17 juillet 1972.

([1]) C. Ehresmann, *Algèbre*, 1re partie, C. D. U., Paris, 1968.
([2]) R. Guitart, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 558.
([3]) R. Guitart, *Foncteurs sous-objets et relations continues* (*Cahiers de topologie et géométrie différentielle*, à paraître).
([4]) R. Guitart, *Comptes rendus*, 270, série A, 1970, p. 1398.
([5]) C. Ehresmann, *Catégorie des foncteurs types* (*De la Revista de la Union Mathematica Argentina*, XX, 1960).
([6]) G. Blanc, *Foncteurs types et structures* (*Thèse de 3e cycle*, Esquisses mathématiques, 14, Paris, 1971).

6, rue Linné, 75005 Paris.